ELEMENTA Arithmeticæ,

AC GEOMETRIAE, ad disciplinas omnes, Aristoteleam præsertim Dialecticã, ac Philosophiam apprimè necessaria, ex

Euclide decerpta: Petro Monçono Valentino autore.



VALENTIAE,

Ex typographia Ioannis Mey.

1559.

Petrus Monçonus Generoso ac Illustri Ximeni Perezio à Calatayu, S. P. D.



VM hæc Arithmeticæ ac Geometriæ elementa abſoluiſſem, ac de his, vt mos eſt, dicãdis mecum cogitarem, tu mihi primus omnium ſtatim occurriſti, ſingulare decus Valentinæ nobilitatis, qui hoc muneris, qualecunq; id eſſet, tibi quaſi tuo iure vendicares. Nam quanquam commemorare poſſem non paucos, qui mea opera & induſtria in liberalibus diſciplinis perdiſcendis vſi ſunt, te tamen primum ego ab ipſis penè incuna-

bulis instituendum, atq; informandum suscepi, primus ex me, cũ ipso propemodum lacte, literarum elementa bibisti. Quam ob rem primos hos fœtus, & eorum, quæ in lucem edere in Dialecticam, ac Philosophiam Aristotelis constitui velut fundamenta, ad te pertinere, ac tuo nomini iure optimo consecranda esse, sum arbitratus. Accedit & alia quoq; causa, quæ me, vt id facerem, adhortata est: quòd intelligam te miro quodam literarum, ac bonarum artium studio incensum esse, & ex omnibus, nullas magis nobilem adolescentem, maiorum splendore, potentia, opibus, innumeris & corporis & animi dotibus nulli secundum decere, quàm disciplinas Mathematicas. Quæ præterquàm

quod

quod absq; improbo illo labore, quem aliæ desiderant,perdiscuntur, qui solet homines innumeros, & tui præsertim ordinis, ab studio literarũ auocare (certissimæ enim sunt & à contentionibus,rixosisq; disputationibus longè alienę,nec spinosis præceptionibus torquent auditorũ animos) magna cum voluptate sciuntur, & domi, foris, in vrbe, in agro,nauigãti, priuato,cum potestate degenti, locis deniq; omnibus, & temporibus firmissimo sunt præsidio,& singulari ornamẽto. Ad hæc cùm sint per vniuersam Philosophiam latissimè fusæ, cognitæ ad disciplinas omnes viam amplissimã sternunt: ipsis verò neglectis omnis ad scientiam aditus intercluditur. Quibus omnibus de causis hæc A-

rithmeticæ & Geometriæ, quæ in Mathematicis principem locum tenent, qua potui breuitate & facilitate ex Euclide decerpere curaui, vt cum disciplinis Philosophicis animum istum tuū, in quo innumeræ virtutes enitent, excolere cœperis: cuius rei desiderio te flagrare vehementer intellexi, ex horū cognitione proximam ad eas viam habeas, & cōpendiariam. Et ne alij horum fructu priuētur, quem spero maximum fore atq; vberrimum, ad communem omnium studiorum vsum hæc ipsa in lucē edere tuo nomine decreui, teq; eorū tanquā patronū & tutorē constituere: vt quod opus tibi potissimùm scriptū est, idipsum tui nominis pręsidio ab inuidorum obtrectationibus tutum appareat. Vale.

PETRVS MONÇONUS candido lectori, S. D.



VM publicè Aristotelis libros de Dialectica ac Philosophia in hac nostra Academia Valentina interpretarer, lector optime, in quo munere obeundo, ut communia adolescentiæ iuuarem studia, non dubitaui bonam ætatis partem consumere, summa ope nitebar, Mathema. exempla, in quibus frequens est Aristoteles, qua poterā dexteritate explicare: adhibebam quicquid in me erat artis & operæ, quòd intelligerē obscurißimis quibusq;, his maximam lucem afferri, & horum ignoratione in locis Aristo. non paucis ac scitu dignis, ueram rei intelligentiam desiderari. Sed (fateor ingenuè) inani me labore torquebam, quòd non sine magno auditorum incommodo fieri, sæpe sum expertus. Cùm enim in more positum sit, ut adolescentes, nullam in perdiscendis artibus ordinis rationem sequuti, magna temporum iactura, & studiorum dispendio, nō tam sua ipsorum culpa, quàm eorum, qui illas sic publicè profitentur, ad Aristoteleam disciplinam Mathematicis disciplinis ne à limine quidē salutatis, accedant, quid mirum si exactißimas, ac proinde difficiles Geometriæ demonstrationes, quæ plerunq; solent exercitatos admodum uehementer torquere, non assequantur? Quid quòd disserendi ratio innumeris referta præceptionibus, Aristotelis scripta uarijs obstructa difficultatibus distrahi au-

ditorum animos in plura studia non patiuntur. Et (ut ait Fabius) angusti oris uascula superfusam humoris copiam respuunt, quã suscipiunt facilè, si paulatim instillaueris. Hæc cùm uersarem animo sæpe, & intelligerem planè retardari iuuenum studia, ac expectatam inde utilitatem magna ex parte impediri, ad intermissum laborẽ Aristoteleæ lectionis nunc denuò eo animi consilio redire constituens, ut quicquid Dialecticæ ac Philosophiæ studia ab ineunte ferè ætate suscepta homini paulò uigilanti contulerunt, id totum studiosis harum disciplinarum cultoribus candidè impertiar. Decreui iterum ad eundẽ lapidem non offendere, sed ita me gerere in hoc Philosophiæ decursu, ut ad eam, quam certò scio ueteres Platonẽ, Aristotelem, & alios omnes tenuisse docendi rationem proximè accedam, & Aristotelis scripta, quæ difficilima hactenus uisa sunt, hac methodo tradita quàm minimo labore doceantur. Excerpsi itaq; ex Arithmetica & Geometria Euclidis ea omnia, quæ ad plenam perfectamq; Aristoteleæ disciplinæ intelligentiam mihi facere uisa sunt, quorum in Dialecticis & uniuersa Philosophia frequẽtißimus est usus. Scio alia præterea esse multa, ad utrãq; artem pertinentia cognitu dignißima, & utilitatis non contemnendæ: sed nec omnia persequi artibus tã latè patentibus inclusa nostri erat instituti, & qui elementis his nostris instructi fuerint, uiã ad libros Aristotelis (quod mihi in primis curæ fuit) & ad Euclidis opera habituros paratißimam speramus. Accipe igitur, amice lector, hanc mei erga te amoris

ris non obscuram significationem: & hunc laberem boni consule: quem si probari tibi intellexero, ingenuè spondeo in rebus omnibus, quibus iuuari posse communia studia cognouero, meam operam nunquã defuturam. Vale.

Quæ sequuntur continet Arithmetica institutio.

QVID Arithmetica,

& ad cæteras quo pacto affecta ſit, atq; ad eam quomodo refferenda ſit Logiſtica.

Cap. I.



Athematicæ omnes circa quantum verſantur molis, aut numeri. Primæ omnium ſunt, ac ſimpliciſsimæ Arithme. & Geometria: quæ in hoc genere puræ, ac ſyncere nomē illud iuſtè, ac legitimè retinēt. Continent ſe ſolæ intra ſuos fines, & cùm vim maximam, ornamētiq; plurimum

rimum cæteris impartiantur, suis ipsæ stant firmamentis, aliena ope non indigent, ex aliis nil omnino capiunt præsidij. Quæ harũ sunt propria, cùm in aliud genus transferũtur, & rebus sensilibus accõmodantur, formas artium procreant mediæ cuiusdam naturæ: sed quæ in Mathematicarum numero soleant haberi. Geometria in cælum sublata Astronomiam efficit, visibilibus addita ὀπτικὴν. Arithmetica sonis admista dedit Musicam. Porrò quam rationem habent duæ illæ primæ ad cæteras, eandẽ obtinet Arithmetica Geometriæ comparata. Est enem ordine prior, & dignitate præstantior: qua sublata, labefactari alias omnes est necesse, vt nec nomn, nec fines suos tueri cõmodè poßint. Unde autẽ dicta

cta

cta sit Arithmetica, satis est perspicuum à numeris enim dictam esse, perinde atq; Grammaticã à literis, ex ipsa nominis ratione satis constat. Hãc, vt & reliquas, quæ huius sunt generis, duas partes complecti Theoreticē, & Practicen, à multis receptum est: è quibus eam, quæ est de numerorũ proprietatibus, Theoreticen dixerunt, quam verò Plato in dialogo de Iusto λογιστικὴν appellat. Arabes Algorithmum, quæ ars est computandi, ad multa quidem vtilis, sed facilior, ac breuior, quàm vt inter liberales artes recipi debeat, Practicē. Quæ diuisio non vsqueadeò ratione nititur, & caret veterum autoritate. Nam Euclides, qui Arithmeticam primus certa methodo tradidit, nusq̃ huius posterioris meminisse visus est, & Seue-

& Seuerinus Boëtius, qui inter Latinos hāc artem copiosissimè scripsit, quæ ad spectatiuam pertinent, solùm persequi videtur. Deinde in alijs disciplinis ea pars, quæ intra cōtemplationem subsistit, est velut præparatio operis, practica verò executio: ita altera in alteram quodammodo refertur. Verùm Arithmetica, quæ inspectionis est, seu contemplationis, ad Logisticam nulla ex parte respicere videtur. Veriùs igitur forsitan hæc ad Arithmeticam non aliter pertinere censebitur, quàm ad Geometriā optice, aut stereometria. Nos ex illa, quæ verè scientia est, & in omnes eas, quæ artiū nomine celebrantur, quàm latissimè funditur, decerpemus ea duntaxat, quibus ad Aristoteleam disciplinam plenè intelligēdam adolescen

lescentes paratißimi reddãtur. Hãc verò diffinire licebit scientiam, quæ vim numerorum atq; naturam perpendit, & omnes eorundẽ affectiones certißimis commonstrat rationibus.

De varijs Arithmeticæ principijs. Cap. II.

A*Rithmetica, quemadmodum & reliquæ artes omnes, suis constat principijs tanquam firmamẽtis, quibus totius disciplinæ moles nititur: vt his sublatis, corruere vniuersa sit necesse. Principiorum autẽ duplicem esse differentiam placuit Aristoteli, compositorum, & simplicium. Simplicia sunt, diffinitiones, quas in omni disciplina cognitas esse oportere, nemo est, qui ambigat. Compositorum duo sunt genera, alia axiomata vocãtur,*

seu

ſeu communes ſententiæ, vſqueadeò peſpicua, vt cuiuis, vel ex ſola vocum ſignificatione citra vllã docentis operam conſtare poßint: Alia poſtulata, certa illa quidem, & ex ſe ipſis fidem habentia, ſed quæ præceptoris operam deſiderent, vt intelligantur. Ac ſunt illa quidem ſatis multa, ſed quæ nobis futura ſunt vſui hîc tantùm apponenda duximus.

Quid vnitas, quid numerus, & de eius partibus. Cap. III.

VNitas, omnis numeri principiũ eſt & menſura. Nã vt res alias numero metimur, ita numeros vnitate. Eſt autem vnitas, qua vnmquodq; vnum dicitur. Numerus eſt multitudo ex vnitatibus compoſita. Quod ad numeri naturam attinet, cùm ſuperiora

periora petimus, in infinitum progredimur. Nam cõtinuò vbi ad decem numerãdo peruenerimus, super eum ab vnitate numerũ reflectimus, idq́ nõ toties, quin sæpius fieri poßit: cùm autem ad minora descẽdimus, necesse est in vnitate cõsistere: ita maximus numerus nõ reperitur, minimus est binarius. Est numerus rerũ discretarũ mensura & modus, quẽadmodum Aristoteles ingeniosißimè dixit. Oportet autẽ eos à rebus, quarum sunt numeri, ad solum intellectum transferri: hoc enim propriũ est Mathematum. Reperitur in numero duplex partium differentia, quædam aliquoties sumptæ totũ numerum efficiunt, ac metiuntur, quas vocant commensurabiles, vulgò aliquotas: vt in quaternario, binarius:

qui bis sumptus quaternariũ procreat. Aliæ totum numerũ non metiuntur. Quod enim ex ductu earum efficitur, aut superat, aut minus est: vt in ternario, binarius, qui semel sumptus minorem gignit numerũ, sæpius verò, maiorẽ. Quis numerus partem habeat prioris generis, & vnam, aut plures, hac regula dignoscetur. Qui in æquos numeros solui potest, partem habet huius generis: quòd si id semel contingat, vnã tantũ habebit, sin pluries, multas, tot scilicet, quot æquales numeros continebit: vt quaternarius, cũ in duos binarios, qui æquales sunt, dũtaxat soluatur, commensurabilem vnã tantùm partem obtinebit binariũ. At .12. cùm in duos senarios, ternarios quatuor, quaternarios tres, binarios sex diuidatur, ac proinde

quater in æquales numeros soluatur, ex quatuor partibus commensurabilibus constabit. Ternarius, quinarius, septenarius, & id genus alij, cùm nullam in æquales numeros diuisionem recipiant, vnitatem solam partem cõmensurabilem habere censebuntur.

De prima diuisione numeri in parem & imparem. Cap. IIII.

Sũma numeri diuisio est per pares & impares. Par numerus est, qui in duas æquas partes diuiditur, ex quibus totus cõstatur numerus: Impar, qui id fieri nõ patitur, seu qui in duas æquales partes diuisus medio vnitatẽ habet interuenientẽ. Pari numero inter alia multa conuenit, vt cũ in Arist. 4. capite primi Posteriorũ

duas partes ſecetur, ad quod genus vna pertinet, ad idem altera referatur: vt in octonario in duos quaternarios diuiſo, pars vtraq; ſub pari numero continetur. Quòd ſi in alias partes ſoluatur, vt in quinarium, & ternarium, vtriq; conuenit imparis appellatio. Illud quoq; ineſt, vt ſi in parem ducatur alius numerus, ſiue par, ſiue impar, par oriatur, ac procreetur. Si enim in binarium. 4. duxeris, octonarius efficitur: ſi quinarium, denarius, quorũ vterq; par eſt. Imparem numerum hæc ſequuntur, quæ prioribus ferè ſunt contraria. Primò, vt diuiſus in partes duas, quæ totum conficiant, parem alteram habeat, alteram imparem: Deinde, vt ſolo impari en eum ducto, gignatur impar. Ex ductu enim

paris

paris in imparem, par procreatur.

De diuiſione paris numeri in pariter parẽ, pariter imparem, & impariter parem. Cap V.

NUmerorum parium tres ſunt ſpecies: Prima, pariter par: Secunda, pariter impar: Tertia, impariter par. Numerus pariter par eſt, qui ſemper in partes æquales vſq; ad vnitatem diſſolui poteſt: vt .32. cuius dimidium.16. *huius*.8. *huius*. 4.*huius* 2. *Hic naſcitur ab vnitate in infinitum progrediens per prioris numeri geminationem, hoc pacto*.1. 2.4. 8. 16. 32.64. *qui numeri omnes ſunt pariter pares. Huic formæ numeri peculiare hoc eſt, vt partes omnes eius commenſurabiles ſint eiuſdem nominis, hoc eſt, pariter pares. Numerus*

pariter impar est, qui per maxima diuisus imparium numerorū constituit species: vt. 14. Producitur ab imparibus naturali ordine se consequentibus, & binario numero geminatis: vt 1.3.5.7.9.11.13.15. quorum quisq; bis sumptus constituit huius numeri formam. Unde sequitur vnumquenq; à proximo abesse quaternario, & inter præcedentem, ac proximè sequentem tres numeros interuenire: vt. 2. & . 6. interuallo distant trium numerorū 3.4. & .5. Impariter par numerus est, cuius proximæ partes, tametsi in æqualia diuidātur, earū tamē partes similem diuisionem non admittunt: vt. 12. 20. 40. hoc genus cum vtroq; dictorum symbolum est. Nam quod ad vnitatem simili diuisione non peruenit, conuenit cum pariter impari: &

quod

quod ſæpius æqualium partium ſectionem recipit cum pariter pari. Gignuntur formæ hæ numerorum ex ductu pariter parium in impares. Si enim conſtituatur series vna imparium numerorum, prætermiſſa vnitate, hoc pacto. 3. 5. 7. 9. 11. 13. & rurſus altera pariter pariū initio ſumpto à quaternario, ad hunc modum 4. 8. 16. 32. 64. 128. & poſteriores ducantur in priores, eo ordine, quo deſcripti ſunt, hi producentur. 12. 24. 48. 96. 192. 384. qui omnes ſunt impariter pares.

De alia paris numeri diuiſione in perfectū, mutilum, & ſuperfluū Cap. VI.

PAriū numerorū, alij ſunt perfecti, alij mutili, alij ſuperflui. Perfectus Ariſt. cap. 4. primi Poſteriorū

fectus & plenus est, qui partibus proportionalibus intra se cõprehensis et collectis est æqualis: vt. 6. cuius partes sunt. 1. 2. 3. quæ coniunctæ. 6. efficiunt. Horum numerorum summa est paucitas, quẽadmodum & aliarum rerum, quæ perfectæ sunt: intra decem sunt. 6. intra centum. 28. intra mille. 496. Superfluus numerus est, cuius partes proportionales vsq; ad vnitatem collectæ totum superãt: vt 12. Eius enim proportionales partes sunt. 1. 2. 3. 4. 6. quæ iunctæ efficiũt. 16. Diminutus numerus est, cuius partes proportionales compositæ minus integro reddunt: vt. 8. cuius partes. 1. 2. 4. non amplius quàm septem colligunt.

De diuisione imparis numeri in primum & incompositũ, secundũ

seu

seu compositum, compositum per se, ad alios autem relatum primum & incompositum. Cap. VII.

HAbet impar numerus, quẽadmodũ & par, formas tres: Primum & incompositum: Secundũ seu compositũ: Tertium compositũ quidem per se, ad alios autem relatum, primum & incompositum. Primus & incompositus est, quem sola vnitas metitur: vt. 3. 5. 7. Secundus & compositus est, quem non sola vnitas, sed alius quoq; metitur numerus: vt. 9. 15. 21. Secũdus & ad alterum primus dicitur, cuius per se communis est aliqua mensura, sed relatus ad alterũ nullam habet: vt. 9. ad. 25. Metitur enim nouenarium solum. 3. Sed si ad inuicem illi duo referantur, communi

Arist. 4. capite primi Posteriorũ

mensura carent. Nam nullus est numerus, ex cuius ductu possit vterque procreari. Aristo. primum numerũ visus est in dũas partes distribuisse, in eum, qui altero modo primus est, & qui est vtroq; modo primus. Primũ altero modo vocat, quem sola vnitas metitur, sed cõponunt numeri, cuiusmodi est. 5. qui cùm nõ habeat aliã mensurã ab vnitate, ex. 3. tamen & 2. conficitur. Utroq; autẽ modo primum appellat eum, qui nec mensuratur numero, nec ex numeris cõflatur: cuius generis est ternarius, quem ita censet esse diffiniendũ: Numerus impar, vtroq; modo primus. Est quoq; in numeris paribus hæc differẽtia, vt sit alius primus & incõpositus: alius secũdus & compositus. Prioris generis est solus binarius primus vtroq; modo

do: Ad partem alteram cæteri omnes referuntur.

De proportionibus, quid sit proportio, & quæ aptè comparentur. *Caput VIII.*

DE numero per se sumpto hactenus diximus: Nunc de eodem disserendum est nobis, sed alteri comparato. Agere autem de numero æd alterum relato, nil aliud est prorsus, quàm mutuã ipsorum habitudinẽ explanare, quæ à Græcis ἀναγογία, Latinè ratio, vulgò proportio, dici potest. Huius partis vtilissima est cognitio, & maximum bonarum artium studiosis præstat adiumentum: ijs verò, qui Aristotelis disciplinam profitetur, apprimè necessaria.

Aristoteles proportionis meminit in locis quàmplurimis, tam in *Physi.* quã in Dialecticis.

Propor

Proportio autem (qua voce, & alijs similibus, tametsi parum splendidis, vtendum est) certa ab Euclide diffinitur duarum quantitatum eiusdem generis, alterius ad alteram habitudo. Hæc non in quãtitate solùm, sed in alijs quoq; multis reperitur: vt in coloribus, sonis, viribus: sed quæ proportionem aliquam inter se seruant, ea quantitatis naturam aut affectionem participant. Necesse est enim eorum, quæ sic affecta sunt, alterũ altero maius esse, aut minus, aut ei æquale. Quæ quantitatis esse propria, satis fusè explicat in Categorijs Aristo. Præterea nulla est inter res alias cuiuscunq; naturæ inuenta ratio, cui similis in quãtitate non reperiatur. Vnde factũ est, vt per habitudinem, quæ inter quãtitates intercedit, pro-

por

portionem diffinierit Euclides. Oportet autem ex rebus, quæ comparãtur (vt diximus) alteram altera maiorẽ esse, aut minorẽ, aut ei æqualẽ. Hinc fit, vt necesse sit, res huiuscemodi ad idem genus pertinere, cõpararíq́; aut duos numeros, aut lineas, aut tempora inter se. Numerus autem lineæ, aut linea corpori, aut corpus tempori non aptè comparabitur. Hæc enim quæ diuersi sunt generis nec sese inuicem excedere, nec æqualia esse, aptè dici possunt. Ita acutè scripsit Aristote. sub idem genus cadere, quæ comparantur omnia: quod verum esse, & qua ratione accipi debeat, ex his, quæ diximus, pespicuum euadit.

De diuisione proportionis in rationalẽ, & irrationalẽ. Cap. IX.

Diffe

Rationalis est, quæ ab aliquo numero denominatur, & inter quãtitates commensurabiles intercedit. Irrationalis, quæ nomen ab aliquo numero non accipit, & in his solùm quantitatibus reperitur, quæ carent communi mensura. Hanc Geometer solus considerat, cuius interest de magnitudine, & formis eius pertractare: Illã Arithmeticus contemplatur, cuius subiectas formas, vt postulat nostri instituti ratio, breuiter persequemur.

De diuisione proportionis rationalis in eam, quæ maioris inæqualitatis dicitur, & minoris. *Cap. X.*

NAscũtur ꝓportiones è numerorũ inter se relatione, per q̃ alterũ alteri æq̃lem aut inæq̃lem esse necesse est

est. Aequalia in omnibus sunt eiusdem generis: inaequalia aut excessu, aut deffectu finiuntur. Proportio itaq; altera aequalitatis dicitur, altera inaequalitatis: Illa inaequalibus reperitur numeris, vt duobus binarijs, duobus ternarijs: simplex & athoma: Simplici enim ac vno tantũ modo contingit numerum vnum alteri aequalem esse. Haec in duas partes scinditur, maioris inaequalitatis, & minoris. Habitudinem maioris numeri ad minorem, proportionem vocant maioris inaequalitatis: cùm autẽ minor numerus maiori comparatur, proportio est minoris inaequalitatis. Utriusq; eaedem sunt formae, & ijsdẽ vocibus designantur: nisi quod in minori inaequalitate, nominibus maioris additur praepositio sub. Quare

cùm

cùm communia ferè habeant omnia, de altera dixisse sat fuerit.

De diuisione proportionis maioris inæqualitatis, & formis eius primis multiplici, superparticulari, & super partiente, & quæ his subijciantur. *Cap. XI.*

Maior inæqualitas nascitur ex vnius numeri ad alterum excessu, quod cùm varijs modis contingat, variæ inde effectæ sunt huiusmodi proportionum formæ. Tres primæ simplices sunt, Multiplex, Superparticularis, Superpartiēs. Duæ ex coniunctione harum mutua procreantur, multiplex superparticularis, & multiplex superpartiens: quibus vocibus, cùm non sint commodiores inuentæ, vtendum est nobis. Nec

alia est efferendi ratio, nisi in paucis, quibus à Græcis nomina posita sunt. Multiplex proportio est, quãdo maior numerus nõ semel cõtinet minorẽ, qualis est, quaternarij ad binarium, 9, ad. 3. Huius formæ sunt propemodum infinitæ, tot scilicet, quot numerorum, à quibus nomẽ accipiunt, species: Quarum nomina sunt, dupla, tripla, quadrupla, quintupla, &c. Dupla est, quando numerus maior minorem bis continet, qualem. 8. seruat ad. 4. Tripla, quando ter, qualis est inter. 9. &. 3. In cæteris simili modo: Proportiones huius generis, inueniuntur omnes, si. 1. qui sequuntur numeri comparentur, 2. reliqui omnes, 3. qui ipsi succedunt, seruato semper naturali ordine numerorum. Unitatem enim. 2. respicit proportione du

ne dupla. 3. tripla. 4. quadrupla, & hoc pacto comparatione reliquorum cũ vnione. Multiplicis proportionis infinitæ species reperiuntur. Superparticularis est, qua maior minorem, & eius insuper portionem aliquam continet: quæ si dimidiata sit, Græcè ἡμιόλιος dicitur, à Cicerone sescupla, vulgò sesquialtera: vt. 6. ad. 4. Si præter integrum tertiam minoris partẽ complectitur, ἐπίτριτος: Si quartam ἐπιτέταρτος, Latinè sesquitertia, sesqui quarta, ac deinceps in infinitũ, relato maiore ad proximè minorẽ: vt. 2. 3. 4. 5. 6. secundus ad primum, sescuplus est: tertius ad secundũ, sesquitertius: sequens ad istum, sesquiquartus. Superpartiens proportio, qua maior minorẽ semel cõprehẽdit, & plures partes eiusdem nominis cõ-

mẽſurabiles, ex quibus fieri vna nequeat maioris denominationis. Partes cõmenſurabiles eiuſdem nominis intelligendæ ſunt, duæ tertiæ, tres quartæ. Pars vltima hoc exẽplo innoteſcet. 10. ad. 7. proportionem habent ſuperpartientem: ad. 8. verò ſuperparticularem. Nametſi. 10. præter. 8. duas octauas contineant, ſcilicet, vnitates duas: ex his tamen binarius conflatur, qui quarta pars eſt octonarij. Proportionis huius formæ multæ ſunt, in infinitum poſſunt excreſcere. Sumũtur enim ex partium commenſurabilium numero, qui certis ac definitis terminis non clauditur, & ex eodem nomina trahunt: vt ſuperbipartiens, qua maior continet minorem, & duas eius partes: ſupertripartiens, qua continet tres partes:

ſuper

ſuperquadripartiens quatuor. Harum ſingulis innumeræ ſubijciuntur ſpecies; ſuperbipartienti, ſuperbipartiens tertias; ſuperbipartiens quartas. &c. Supertripartienti, ſupertripartiens quartas, ſupertripartiēs quintas, ſupertripartiens ſextas, ſupertripartiens ſeptimas. &c. Eodem modo in cæteris. Quænam autem ſit cuiuſq; harum ratio, ex ipſis vocibus perſpicuum euadit. Duæ aliæ proportionis formæ compoſitæ ſunt: Multiplex ſuperparticularis, & Multiplex ſuperpartiens. Multiplex ſuperparticularis eſt, qua maior numerus minorē continet pluries, & partem aliquam commenſurabilem: vt 5. ad. 2. Nam binarius bis continetur in quinario, & præterea vnitas, quæ dimidium eſt binarij. Huius ſpecies

Dupla ſuperparticularis, tripla ſuperparticularis, quadrupla ſuperparticularis. In prima maior numerus minorē cōtinet bis, & partē vnā, quæ cernitur in .5. & binario: In altera maior minorē cōprehendit ter, & partem itidem vnam, qualem ſeruāt 7. ad. 2. In tertia minor numerus in maiori quater comprehenditur, qua comparātur .9. ad.2. & .13. ad.3. Harum ſingulæ diuiſionem recipiūt in finitam, vt in finitus eſt etiam partiū commenſurabilium numerus: efferunturq́ omnes compoſitis nominibus, vocibus formarum multiplicis proportionis, & ſuperparticularis in vnum nomen coniunctis, hoc pacto, dupla ſeſquialtera, dupla ſeſqui tertia: tripla ſeſqui altera, tripla ſeſquitertia, & ita licet in in finitum progredi in huiuſmo

huiusmodi formis: Quarum definitiones constituentur facilè, si earum, quas multiplex & superparticularis cõplectuntur, rationes cõiungantur. Multiplex superpartiens proportio est, qua maior numerus minorẽ continet plusquã semel, & aliquot prætereà partes: vt. 8. ad. 3. 11. ad. 4. Huius species ex formis multiplicis, & superpartiẽtis conflantur. Proximæ sunt, dupla superpartiens, tripla superpartiẽs, quadrupla superpartiẽs: Harũ vnaquæq; sub se habet infinitas, quæ nascũtur ex infinito partiũ numero: cuiusmodi sunt, dupla super bipartiẽs, dupla supertripartiẽs, dupla superquadripartiens: tripla superbipartiẽs, tripla supertripartiẽs: Hæ quoq; singulæ diuidi in alias possunt itidẽ numero infinitas, hoc modo

Dupla superbipartiens tertias, dupla superbipartiens quartas, dupla supertripartiens quartas, quintas, sextas, in cæteris eodem modo. Nam in immēsum produci queunt, & earũ omnium rationes facillimum est ex præcedentibus elicere.

Quiuis numeri propositi quo pacto in extrema redigantur, hoc est, minimos numeros eandem seruantes proportionem.

Cap XII.

T*Ermini proportionis appellantur minimi numeri in aliqua proportione: vt proportionis sesquialteræ termini sunt. 3. & .2. Nam minores his in ea proportione reperiri non possunt. Cùm igitur duo sese offerunt numeri, quorum habitudo non*

satis

ſatis perſpecta eſt, illos ad terminos ſic reducemus. Maior numerus per minorē diuidatur. Si in diuiſione ad vnitatem peruenitur, non eſt progrediendum vlterius: illi enim ſunt minimi in ea proportione numeri: ſi verò numerus aliquis ſuperſit, per hunc minor numerus diuidatur, quem ſi abſumi contingat, ceſſandum eſt à diuiſione: ſin minus, numerus, qui ex prima diuiſione ſuperfuit, per alterũ diuidēdus eſt, qui eſt ex ſecũda diuiſione relictus, fietq́ hæc reciproca diuiſio, donec occurrat numerus, qui diuidendum totũ conſumat. Per hunc vltimo occurrentem, diuidantur numeri propoſiti, & qui prodibunt erũt proportionis termini: vt propoſiti numeri .30. & .18. quorum non ita facilè cognita eſt habitudo, ſic ad termi-

nos redigentur, diuisis. 30. per. 18. relinquuntur. 12. Per hæc diuido minorem numerum. 18. relinquuntur. 6. per quæ. 12. diuido residuum primæ diuisionis, & quoniam video consumptum esse id quod diuidendum erat, per senarium. 30. diuido, & apparent in quotiente. 5. diuido rursus. 18. exeuntq́. 3. hi sunt termini proportionis, quam habent. 30. ad 18. cumq́ inter terminos proportio intercedat superbipartiens tertias, cõcludere licebit, maiores numeros eadem sese proportione respicere.

De numero accommodato figuris, & quòd triplex sit eius forma, linearis, plana, & solida.

Cap. XIII.

Figu-

FIgura in magnitudinibus reperitur & in coniuncta quantitate. Sed prius ac simplicius in numeris, argumẽto est, quòd eundem numerũ in varias formas possumus transformare, eãdem autẽ magnitudinem nõ possumus. Triplex autẽ est numerorũ figura, linearis, plana, seu superficialis, & solida. Linearis numerus est, qui suas omnes in eandem positionem porrigit vnitates: sub qua forma omnes numerorũ species continentur, si ita describantur, vt in vnum & idem interuallum perpetuò procedãt, binarius hoc modo, . . , ternarius itidem eodem . . . , & ita in cæteris. Planus numerus est, qui ex duobus numeris procreatur, sese ad inuicem multiplicãtibus, vel qui per suas vnitates in plana superficie descriptus, longitu

Arist. 4. capite primi Posteriorũ

longitudinem latitudinemq́ tantùm obtinet, vt quaternarius, si ita describatur : : Habet infinitas species sub se. Prima est triangularis numerus, qui ab vnitate descriptus tria latera reddit æqualia hoc modo .·. in quam figurã redigi possunt, ternarius, senarius, denarius, & alij permulti. Secunda est circularis numerus, qui ex aliquo numero in seipsum ducto productus, in illum tandem desinit à quo producebatur, vt. 25. Procreãtur enim ex ductu quinarij in seipsum, & in quinariũ finiuntur. Sic quoq́ 36. 625. numeri sunt circulares. Nã alter ex ductu senarij in seipsum producitur, alter ex ductu. 25. Ducta videtur appellatio ex circulo Geometrico, in quo idem pũctum principiũ est, atq́ finis. Numerus quoq́ quadra

tus

tus sub plano continetur, de quo frequens admodum mentio in Philosophicis habetur disciplinis. Est autem quadratus numerus, qui ex ductu numeri alicuius in seipsum semel, procreatur: vt. 4. 9. 16. 25. Producitur enim quaternarius ex binario in seipsum ducto, nouenarius ex ternario, 16 ex quaternario, hoc modo. Bis duo, ter tria, quater quatuor. In huiusmodi quadratis numeris, ille, ex cuius ductu procreantur, radix, seu latus quadrati appellatur: vt quaternarij radix est binarius: nouenarij ternarius, quod facilè intelligetur cuiusque numeri quadrati vnitatibus in tetragonam figuram redactis. Conuenit inter alia multa huic numero, vt si vnus in alterum ducatur, eiusdem nominis & formæ tertius procreetur,

tur, hoc est, quadratus. Ducto enim nouenario in quaternarium, efficiũtur 36. numerus quadratus. Sunt & aliæ plani numeri formæ permultæ, altera parte longior, pẽtagonus, hexagonus: sed omnes persequi nõ est nostri instituti. Solidus numerus est, qui ex tribus numeris producitur sese multiplicãtibus, vel qui sparsim per suas vnitates descriptus longitudinẽ, latitudinẽ, & altitudinẽ habet: vt. 8. quẽ tribus illis constare dimẽsionibus intelligemus, si eius vnitates in singulos tesseræ angulos distribuantur, quolibet latere pares, hoc est, duas cõplectente. Habet species permultas, Sphæricũ, pyramidem, Phæniscũ seu Cuneolũ: quorũ rarò incidit apud Philosophos mẽtio, certè ab Arist. nusquã in exẽplũ assumpti videntur. Cubus, qui in soli-

ſolidis numeratur, frequētiſsimus eſt vſus. Is dicitur numerus ex ductu alterius in ſe ipſum bis, procreatus, aut quod idem eſt, ex ductu quadrati in ſuū latus, vt. 8. 27. Si enim binarius in ſeipſum bis ducatur, hoc modo, bis duo bis. 8. efficietur: et ſi ternarius in ſeipſum ratione eadem, ſecundus numerus procreabitur. 27. Idem ſequetur omnino ducto quaternario in ſuū latus, hoc eſt, binariū. In hac numeri forma, quēadmodum & in quadratis, radicē appellare conſueuerūt numerū illū, ex cuius ductu gignitur Cubus, vt octonarij radix eſt binarius, 27. ternarius. Traditur autem certa in vtriſq; radicis inueniēdæ regula, ſed hæc ex ea petēda eſt, quæ cōputādi rationē docet, quā Logiſticā diximus.

De comparationum habitudine,

quæ Analogia dicitur, quid ſit, & quas habeat differentias.

Cap. XIIII.

OMnis comparatio, vt minimũ, fit inter duo extrema, de qua hactenus diximus. Solent autem ſæpiſſimè plura duobus ſibi inuicem comparari: vbi non vna tãtùm eſt ratio, ſed plures: comparanturq; non tam extrema ipſa, quàm rationes, quã habitudinum comparationem poſſumus appellare, Analogiam ſeu mediocritatem, vulgò proportionalitas nominatur. Sit igitur Analogia ſimilitudo quædam & comparatio multarum proportionũ. Reperitur aliquãdo in tribus extremis, quorũ medium bis ſumitur: vt ſi comparentur hi numeri. 4. 2. 1. *Eſt enim ſicut primus*

ad secundum, ita secundus ad tertium: vocaturq́ continua Analogia. Cùm autem accipiũtur plura tribus, vt vnoquoq́ semel tantùm in comparatione vtamur, nascitur genus alterum Analogiæ priori contrarium, quam disiunctam vocant: qualis cernitur in his numeris, 12. 6. 8. 4. in quibus, quæ est ratio primi ad secundũ, eadem est tertij ad quartum.

Aristot. 5. Ehtico ad Nichoma. & 4. ad Eudemum.

De tribus Analogiæ formis, Arithmetica, Geometrica, Musica. *Cap. XV.*

A*Nalogiæ formæ repertæ sunt multæ, quæ nec certa ratione possunt comprehẽdi. Sed veteres triũ duntaxat præcipuè meminisse visi sunt, Arithmeticæ, Geometricæ, & Musicæ: quas mediocritates appel-*

Vide Aristotel. 5. Ethico.

 larunt,

larunt, ducta fortaſſe ex virtutibus morum ſimilitudine. Hæ enim inter extrema duo exuperantiam & deſectionem medio quodam loco conſiſtere traduntur. Eſtq; eadem in Analogia ratio, in qua tres numeri reperiuntur, medius vnus, & extremi duo, ita inter ſe compoſiti, vt extremorum alter exuperet medium, alter ab eo deficiat. Mediocritas Arithmetica eſt, in qua inter numeros, qui ſibi inuicem comparantur, eadem eſt differentia, hoc eſt, idem exceſſus, non ſimilis proportio, qualis eſt in tribus numeris. 4. 3. 2. *& in his quatuor.* 8. 6. 3. 1. *Comparatur enim octonarius ſenario, & ternarius vnitati: & quo exceſſu primus vincit ſecundum, eodem tertius ſuperat quartū. Eſtq; in vtriſq; differentia binarius. Geome-*

me

metrica mediocritas est, in qua spectantur, non eædem differentiæ, sed proportiones similes: vt. 9. 6. 4. 15. 5. 6. 2. Nam in illis proportio vna est, sesquialtera, in his tripla, & inæquales differentiæ. Vincunt enim 9. 6. ternario: hi verò. 4. binario. Reperitur præter hæc tertium Analogiæ genus harmonicum, in quo nec eadem obseruatur numerorum differentia, nec ratio similis, sed conferuntur inter se partium excessus, habentq́ rationem eandem, quam maximus numerus ad minimum, vt videre est in his. 6. 4. 3. quorum differentiæ sunt maioris & medij. Binarius, medij, & minoris vnitas: Est autem binarij ad vnitatem ratio eadem, quæ senarij ad ternariũ, dupla videlicet.

De sex alijs Analogiæ formis ex quinto Euclidis.

Cap. XVI.

EVclides quinto elementorum sex alias constituit Analogiæ species, conuersam, permutatam, coniunctam, disiunctam, euersam, & æquã. Conuersa est, cùm sumptis quatuor numeris, in quibus, vt se habet primus ad secundum, ita tertius ad quartũ, concludimus ordine conuerso, quod est secundus ad primum, idem esse quartum ad tertium, hoc modo: si est. 8. ad 4. sicut. 6. ad. 3. erit è conuerso. 4. ad 8. sicut. 3. ad. 6.

Permutata est, cùm primus est ad secundum, sicut tertius ad quartum, & ex eo concluditur primus esse ad tertium, sicut secundus ad quartum:

vt si

vt si est.8. ad.4. sicut.6.ad.3. erit permutatim. 8. ad.6. sicut. 4. ad tria, inter quos eadem omnino ratio est.

Coniuncta vocatur, cùm est primus ad secundum, sicut tertius ad quartum: vnde colligimus primum cum secundo esse ad secundum, quod est tertius cum quarto ad quartum: vt si est. 8. ad. 4. sicut. 6. ad. 3. erit coniunctim.12. ad.4. sicut.9.ad.3.

Disiuncta est, cùm primo & secũdo eodem modo se habentibus, quo secundus & quartus, concludimus differentiam primi & secundi eam seruare proportionem ad secundum, quã seruat differentia tertij & quarti ad quartum: vt si sunt. 18, ad. 6. sicut.9. ad.3. erunt.12.ad.6. sicut.6.ad.3.

Euersa est, cùm primo & secundo, tertio itidem & quarto eandem inter

ſe proportionem ſeruantibus, colligimus primum ad differentiam ipſiusmet & ſecundi ſe habere, quemadmodum tertium ſe habet ad differentiã, qua vincit quartum: vt ſi ſunt. 12. *ad* 4. *ſicut.* 9. *ad.* 5. *erunt.*12.*ad.* 8. *ſicut* 9.*ad ſenarium. Aequa Analogia eſt, in qua propoſitis duobus numerorum ordinibus eandem inter ſe rationem ſeruantibus, colligimus medijs intermiſsis, inter extrema ſimilem eſſe proportionem: vt ſi ſumantur tres numeri.* 12. 6. 3. *& ex altera parte tres alij.* 8. 4. 2. *cùm ſit vtrorunque ratio eadem concludere licebit.* 12. *&* 3. *extrema prioris ordinis eo modo ſeſe habere, quo.*8. *&.*2.*extrema ſecũdi.*

Simplicia principia artis, hoc eſt, diffinitiones, hactenus tradidimus: quæ ſequuntur ad alterũ genus pertinent,

tinent, suntq́ dignitates & postulata arti & conficiendæ & pernoscēdæ apprimæ necessaria.

Dignitates Arithmeticæ.

OMnis numerus est maior qualibet sua parte. 1

Ea pars minori dicitur maior, quæ sortitur minorem denominationem, minor quæ maiorem. 2

Omnis numeri monas est, pars aliquota & denominata ab ea. 3

Omnis numerus totus à monade est, quota eius pars monas nuncupatur. 4

Omnis numeri partes simul collectæ æquantur suo toti. 5

Numerus crescens ex maiorū additione, maior est eo, qui crescit ex additione minorum. 6

7 *Qui consurgunt æquali multitudine vnitatum, sunt ad inuicem æquales.*

8 *Hi numeri sunt ad inuicē æquales, quorum partes eiusdem denominationis sunt inter se æquales.*

9 *Si æqualibus numeris æquales adijciantur, consurgunt æquales.*

11 *Si ab æqualibus numeris æquales numeros demas, residui erunt æquales.*

12 *Si æqualibus numeris addantur inæquales, inæquales consurgent.*

13 *Si ab æqualibus auferantur inæquales, remanentes erunt inæquales.*

14 *Si numerus in monadem ducitur, aut contra, idem numerus semper orietur.*

15 *Duobus inæqualibus numeris propositis, si differētia maioris addatur*

minori

minori numero, relinquentur æquales numeri.

Si numerus ducatur in alterum, productus sese habet ad multiplicandum, vt multiplicans ad vnitatem. 16

Si numerus diuidat alium, qui diuiditur ad diuidentem sese habebit, vt quotiens ad vnitatem. 17

Qui ad eundem numerum relati æquales seruant proportiones, sunt ad inuicem æquales. 18

Si duo maiores numeri tertiū aliquem efficiunt, & duo minores pariter, qui ex coniunctione maiorum procreabitur maior erit. 19

Eadem est proportio maioris numeri ad minorem, quæ partis ad partem eiusdem nominis. 20

Quoties numerus à numero subtrahi potest, toties in eo potest & numerari. 21

Petitiones seu postulata.

1 *NUmerum in infinitum crescere.*

2 *Nullum numerum in infinitum decrescere.*

3 *Unitatem pari numero adiunctã imparem reddere.*

4 *Unitatem impari adiunctam efficere imparem.*

5 *Cuiuis numero innumeros aßignari posse æquales.*

6 *Maiorem numerum non numerare minorem.*

Demonstrationes decem.

EX Arithmetica vnam tantùm aut alteram demonstrationẽ in exemplum assumpsisse visus est Aristote. nos tamen has paucas ex varijs libris Euclidis hîc apponendas duximus

ximus: quarum aliæ ad ea, quæ ex arte ista Dialecticis & Philosophicis libris inserta sunt, pertinent: aliæ Geometricis intelligendis sunt necessariæ. Nemini itaque mirum videatur, si ex tam multis has tantùm decerpserimus. Porrò in his tradendis hanc secuti sumus methodum, vt præter Campani commentaria, aut Theonis, demonstrationes singulas, quæ hanc operam desiderare videbantur, in partes distinxerimus, probationibus omnibus explicatis atque explanatis. Sic enim speramus, facillimè, etiam à rudissimis quibusq;, perceptas iri. Sumpsimus quoque Theoremata aliquot in his nostris demonstrationibus, velut Hypotheses, demonstrationibus eorum prætermissis, quòd arduæ atq; difficiles

nimis

nimis viderentur, & absq; alijs permultis neutiquam intelligi possent.

Theorema primum. 17. septimi Euclidis.

Vnitas	
3	4
a	b
12	12
c	d

Si duorum numerorum vterq; ducatur in alterum, qui inde producentur erunt æquales, seu potius idem vtrobiq; proueniet.

NVmerus numerum multiplicare dicitur, quãdo quotæ sunt in ipso unitates, toties componitur multiplicatus, & gignitur aliquis. Ex qua diffinitione perspicuum euadit, quoties multiplicatus numerus reperitur in tertio, qui producitur, toties unitatem esse in multiplicante: & contrà, quotiens unitas est in multiplicante, toties multiplicatũ in tertio illo reperiri, qui ex multiplicatione procreatur. Sint igitur a & b numeri, & ex a in b proueniat c, idem etiam ex b in a producetur. Cùm enim ex a in b proueniat c, per diffinitionem proximè traditam erit b in c, quoties unitas in a. Iam si unitas ad a sese habet, quemadmodum b ad c (numerat enim unitas a, sicut b c) permutatim ergo quoties unitas in b, toties a in c. Quod etiam per 16. septimi pespicuum euadit, quæ ita habet: Si numerat

numerat unitas aliquem numerum, quoties tertius quartum, erit quoq; permutatim, ut quoties unitas numerat tertium, toties secundus numeret quartum. Quia igitur a toties coaceruatur in c, quoties in b est unitas, sequitur ex definitione ex b in a fieri c, quod probandum erat.

Demonstrationis explicatio.

Demonstratione efficitur ex b numero in a fieri c, idq; tribus rationibus.

Prima concludit, quoties vnitas est in a, toties b esse in c, in hunc modum.

Quando numerus numerum multiplicat, quoties unitas est in multiplicante, toties multiplicatus est in tertio, qui gignitur, — *Constat ex præmissa diffinitione.*

Atqui a multiplicat b, & gignitur c, — *Est hypothesis.*

Ergo quoties unitas est in a, toties erit b in c.

Secunda concludit, quoties vnitas in b, toties a in c, in hunc modum.

Quando numerat unitas aliquem numerum, quoties tertius quartũ, erit permutatim, ut quoties unitas tertium, toties secundus numeret quartum: — *Constat ex 16. septimi*

Sed unitas numerat a, quoties b c, — *Est conclusio præcedentis.*

Ergo quoties erit unitas in b tertio, toties a secundus erit in quarto c.

Tertia

Tertia colligit, quod probandum erat, ex b in a fieri c.

Constat ex præmissa definitione.
Est conclusio præcedentis.

Quando quot sunt unitates in aliquo numero, toties alter coaceruatur in tertio, tertius fit ex ductu primi in secundum,
At quoties unitas est in b, toties a est in c,
Ergo ex ductu b in a fit c.

Theorema secundũ.18.septimi.

6	8
d	e
3	4
b	c
a. 2	

Si vnus numerus in duos ducatur, qui gignuntur ex multiplicatione, eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

Multiplicet a utrunque duorum numerorum b & c, & gignantur d & e, dico eam seruare proportionem d ad e, quam b ad c. Nam si a multiplicat c, & prouenit d, erit b in d, quoties unitas in a. Rursus, si a multiplicat c, & producitur e, erit itidem c in e, quoties unitas in a per diffinitionem traditam. Ita d b, & e c æqualiter continent, nam quoties a unitatem. Ergo sicut d ad b, ita e ad c. Quare permutatim erit d ad e, sicut b ad c, quod probandum fuit.

Explicatio.

Demon

Demonstratio probat d ad e eam seruare proportionem, quam b ad c tribus rationibus.

Prima concludit, b in d, & c in e reperiri, quoties vnitas in a.

Quando numerus numerum multiplicat, quoties unitas est in multiplicante, toties multiplicatus est in tertio, qui gignitur,

Atqui a multiplicat b, & producitur d, itidē multiplicat c, & producitur e,

Erunt igitur b in d, & c in e quoties unitas in a.

Secunda concludit, id esse d ad b, quod e ad c, in hunc modum.

Numerorum ad eos, quos ex æquo continent, eadem est proportio: — Ex se patet

Cōtinent autem d b, & e c ex æquo, nam quoties a unitatem, — Est conclusio præcedentis.

Ergo d ad b, & e ad c eadem erit ratio.

Tertia concludit, quod demonstrandum erat, id esse d ad e, quod b ad c.

Propositis quatuor numeris, si sit primus ad secundum, sicut tertius ad quartum, erit sicut secundus ad quartum, ita primus ad tertium: — Ex permutata proportione.

Atqui d ad b perinde sese habet, atq; e ad c, — Conclusio pæcedentis

Ergo quod est b ad c, id erit d ad e.

Theo

Theorema tertium. 20. ſeptimi.

a	6
b	4
c	3
d	2
e	12
f	12
g	24

Si fuerint quatuor numeri proportionales, quod ex ductu primi in vltimum producitur, æquum eſt ei, quod fit ex ductu ſecundi in tertiũ.

PRoportionales numeri uocantur, qui ſe omnes eadem proportione reſpiciunt. Sit proportio a b, ſicut c ad d, fiatq́; ex a in d e, & ex b in c f: erunt proculdubio e & f numeri æquales. Ducatur enim a in b, & fiat g, erit per decimam octauam præcedentem g ad d, ſicut b ad d. Cùmq́; per 17. ex b in a fiat g, & ex eodem b in c f, erit per decimam octauam g ad f, ſicut a ad c. Quòd ſi g ſeruat proportionem ad e, quam b ad d, & idem g ad f eandem ſeruat, quam a ad c, cũ illorum proportiones ſint eædem, erit g ad e & f proportio eadem: ergo e & f ſunt numeri æquales.

Explicatio.

Demonſtratio probat e & f eſſe numeros æquales, quorum e producitur ex ductu a in d, f uerò ex ductu b in c, quatuor rationibus.

Prima concludit, ſi ducatur a in b, & fiat g, g ad e ſeſe habere, ſicut b ad d, in hunc modum.

Si

Si numerus unus in duos ducatur, qui gignuntur ex multiplicatione eandem rationem habent, quam multiplicati. Ex.18. septimi.

Atqui a multiplicat b, & gignitur e, idem a multiplicat b & producitur g, Hypothesis.

Ergo sicut b ad d, qui sunt numeri multiplicati, ita g ad e, qui ex multiplicatione procreantur.

Secunda probat, ex b in a fieri g, hoc modo.

Si duorum numerorum uterq; ducatur in alterum, idem numerus utrobiq; proueniet, Ex.17. septimi.

Atqui ex a in b fit g,

Ergo si b ducatur in a, idem g proueniet. Hypothesis.

Tertia concludit, esse g ad f sicut a ad c.

Si numerus unus in duos ducatur, geniti eandem habent rationem, quam multiplicati, Ex.18. septimi.

Atqui ex b in a fit g, & ex eodem b in c, f, Hypothesis.

Ergo g ad f erit, sicut a d c.

Quarta colligit, quod demonstrandum erat, e & f esse numeros pares.

Si unius numeri ad duos sit eadem proportio, necesse est illos esse pares: Ex se patet

Atqui g ad e & ad f eandem seruat proportionem. Ex praecedentibus.

Ergo e & f sunt numeri aequales.

E Theo

Theorema quartum. 22. septimi.

a	6
b	5
c	2
d 4	e 3

Si fuerint duo numeri secundum suam proportionem minimi, ipsi erũt ad inuicem primi.

Sint duo numeri *a & b secũdum suam proportionem minimi, dico ipsos fore ad inuicem primos. Si enim non sint, numeret eos .c, secundum d, & e:* Eritq; per 18. *d ad e, sicut a ad b.* Et *quia d & e sunt minores a & b, sequitur a & b non esse suæ proportionis minimos, quod est positioni contrarium.*

Demonstratio explicatione nõ indiget.

Theorema quintum. 21. octaui.

a	8
b	12
c	18
d	27

Si quatuor numerorum continuè proportionalium primus fuerit cubus, quartum cubum esse necesse est.

Sint quatuor numeri continuè proportionales *a, b, c, d, sitq; a cubus, dico d etiam fore cubum*

bum. Principio quod decima nona demonstratione concluditur statuatur principij loco: Si duorum numerorum duo medij proportionales fuerint numeri, ipsos solidos fore atque similes. Quod exemplis multis ostendi potest, & in praeassumptis numeris euadit pespicuum. Cùm enim inter. 8. & 27. duo medij proportionales intercipiantur. 12 &. 18. in quibus, quae est proportio primi ad secundum, eadem est secundi ad tertium, & tertij ad quartum: nam utrobique est sesquitertia, ipsi extremi. 8. &. 27. sunt numeri solidi, & similes, uterque enim cubus. Ex theoremate isto pendet propositi demonstratio.

Quoniam enim inter a d duo medij proportionales intercipiuntur b c, erunt ipsi solidi, & similes:

Atqui a est cubus ex hypothesi,
Ergo & d erit cubus.

Explicatio.

Demonstratio ostendit, cùm inter a d duo medij proportionales sint numeri b c, & a sit cubus, d quoq; fore cubum unica tantùm ratione.

Si duorum numerorum duo medij proportionales fuerint numeri, ipsi solidi erunt & similes, ut si unus sit cubus, sit quoq; cubus & alter, Ex. 9.octaui.

Atqui inter a d duo medij proportionales sunt numeri c b, Hypothesis.

Ergo a d solidi erunt & similes, est autem a cubus ex hypothesi: ergo & d, quod fuerat demonstrandum.

Theorema sextum. 23. octaui.

a	8
b	27
c	64
d	216
e	12
f	18

Si duorum numerorum, quorum proportio fuerit sicut cubi ad cubum, alter vter fuerit cubus, erit quoq; cubus & alter.

Sint duo numeri a b seruantes eandem proportionem, quam seruant c d, sitq; a cubus, dico b cubum esse. Necesse est enim c d solidos esse & similes, cùm sint cubi, quod constat ex. 19. octaui.

Inter ipsos itaq; cadent duo medij proportionales per. 18. totidem igitur cadent inter a b per. 8. octaui, quæ demonstrat, si inter duos numeros numeri quodlibet cõtinuè proportionales ceciderint, inter omnes eiusdem proportionis totidem cadere. Medij inter a b sint e f. Quoniã igitur quatuor numeri a, e, f, b continuè proportionales sunt, & a est cubus: ergo b erit cubus, quod fuerat demonstrandum.

Explicatio.

Demonstratio cõcludit, si a & b perinde sese habeãt atq; c & d, qui sunt cubi, & a sit cubus, b cubum

cubum fore quatuor rationibus.

Prima colligit, c d esse solidos & similes, in hunc modum.

Omnes cubi sunt solidi similes, — Ex. 19. octaui.
At c d sunt cubi, — Hypothesis.
Ergo solidi & similes.

Secũda concludit, inter c d duos cadere numeros continuè proportionales.

Si fuerint duo numeri solidi similes, necesse est inter eos, duos numeros continuè proportionales intercesse. — Ex. 18. octaui.
Atqui c d sunt huiusmodi, — Conclusio precedētis
Ergo inter c & d duo intercerunt medij.

Tertia colligit, inter a b duos quoq; interesse proportionales.

Si inter duos numeros quodlibet continuè proportionales ceciderint, totidem inter alios eiusdem proportionis cadere est necesse. — Ex. 8. octaui.
At inter c d cadunt duo numeri, & a b eandẽ habent cum illis proportionem, — Est conclusio praecedentis.
Ergo inter a b duo cadẽt proportionales e f.

Postrema ostendit, b esse cubum, quod fuerat demõstrandum.

Si quatuor numerorum continuè proportiona- — Ex. 12. octaui.

lium primus fuerit cubus, quartus quoq; erit cubus:

Ex praecedentibus. At *a, e, f, b, sunt numeri proportionales, & a est cubus,*

Ergo *b erit numerus cubus.*

Theorema septimum.

3. noni.

f	16
g	32
a	8
b	64
c	2
d	4

Si numerus cubus in seipsum ducatur, qui inde producetur, erit cubus.

Sit a cubus numerus, ex quo in se ducto fiat b, dico b fore cubum. Sit enim c latus a numeri cubi, ducaturq; in seipsum, & fiat d, certè ex c in d fiet a, quod manifestũ est ex lateris cubi numeri diffinitione. Iam cùm c seipsum multiplicans efficiat d, quoties unitas est in c, toties erit c in d per diffinitionem primæ propositionis:

Quare quæ est proportio unitatis ad c, eadem est c ad d.

Rursus cùm c seipsum multiplicãs efficiat d, & multiplicans d producat a, per.18. quæ erit proportio c ad d, eadem erit d ad a. Ex quibus sequitur unitatem, c, d, & a esse continuè proportionales, contineriq; inter unitatem & a duos medios numeros continuè proportionales. Porrò cùm a in seipsum ductus efficiat b, quoties unitas in a, toties a in b, eritq; proportio unitatis ad a, sicut

a ad

a ad b: cumq; inter unitatem & a duo medij numeri intersint proportionales, inter a quoq; & b totidem intererunt, sintq; f & g, quod probatur ex.8. octaui.

Si igitur a, f, g, b, sunt quatuor numeri cōtinuè proportionales, & a ex hypothesi est cubus:

Ergo per præcedentem b erit cubus, quod fuerat demonstrandum.

Demonstrationis explicatio.

Demonstratio probat, si a cubus numerus in seipsum ducatur, & producatur b, b esse cubum sex rationibus.

Prima concludit, si c latus cubi numeri a in seipsum ducatur, & producatur d, ex ductu c in d fieri a, in hunc modum.

Latus cubi numeri est numerus, ex cuius ductu in seipsum bis cubus producitur, Ex diffinitione lateris cubi.

At c est latus cubi a, Hypothesis.

Ergo ex c in seipsum bis fiet a, atqui ducere c in seipsum bis nil aliud est, quàm ducere c in d: igitur ex c in d fiet a.

Secunda concludit, vnitatem ad c esse, sicut c ad d, in hunc modum. Ex diffinitione prima.

Quando numerus numerum multiplicat, quoties unitas

unitas est in multiplicante, toties multiplicatus est in tertio, qui gignitur.

Hypothesis. *At c seipsum multiplicat, & fit d,*

Ergo quoties unitas in c, toties c in d, eritq; proportio unitatis ad c, quae est c ad d.

Tertia concludit, quae est proportio c ad d, eandem esse d ad a, in hunc modum.

Ex. 18. septimi. *Si numerus unus in duos ducatur, qui gignuntur ex multiplicatione eandem seruant proportionem, quam multiplicati.*

Hypothesis. *At ducitur c in seipsum & fit d, ducitur quoq; c in d, & fit a,*

Ergo quae est ratio c ad d, eadem erit d ad a, ex quibus sequitur unitatem, c, d, & a esse continuè proportionales, contineriq; inter unitatem & a duos numeros continuè proportionales.

Quarta concludit, esse proportionem vnitatis ad a, sicut a ad b, in hunc modum.

Ex diffinitione primae. *Quando numerus numerum multiplicat, quoties unitas est in multiplicante, toties multiplicatus est in tertio, qui gignitur,*

Hypothesis *Atqui a in seipsum ducitur, & fit b,*

Ergo sicut unitas ad a, ita a ad b.

Quinta concludit, inter a & b

duos

duos intereſſe numeros proportionales, in hunc modum.

Si inter duos numeros numeri quodlibet continuè proportionales ceciderint, inter omnes eiuſdem proportionis, totidem cadere eſt neceſſe, Ex. 18. octaui.

Atqui inter unitatem & a duo medij interſunt, eſtq́; ſicut unitas ad a, ita a ad b, Ex præcedentibus.

Ergo duo erunt medij inter a & b, f ſcilicet & g.

Poſtrema colligit, b eſſe cubum, quod erat demonſtrandum, in hunc modum.

Si quatuor numerorum continuè proportionaliũ primus fuerit cubus, quartum cubum eſſe eſt neceſſe. Ex. 5.

Atqui a, f, g, b ſunt numeri continuè proportionales, eſtq́; a cubus, Ex præcedentibus.

Ergo & b erit numerus cubus.

Theorema octauũ, 4. noni, quo vſus eſt Ariſt. cap. 7. primi Poſt.

Si cubus in cubum ducatur, qui inde producetur erit cubus.

a	8
b	27
d	64
c	216

Sint *a & b cubi, fiatq́; ex a in b c, dico c fore cubum. Ducatur a in ſe, & fiet d, eritq́; per præcedentem d cubus: Et quia per. 18. ſeptimi*

est a ad b, sicut d ad c, constat ex. 13. octaui esse cubum.

Explicatio.

Demonstratio concludit, cùm sint a & b cubi, & ex a in b fiat c, c esse cubum tribus rationibus.

Prima ostēdit, si a in seipsum ducatur, & fiat d, d esse cubum.

Ex. 3. noni. Si cubus ducatur in seipsum, qui producetur cubus erit.

Est hypothesis. At a, cùm sit cubus, in seipsum ducitur, & fit d,
Ergo erit d cubus.

Secunda colligit, esse a ad b, sicut d ad c.

Ex. 18. septimi. Si numerus unus in duos ducatur, qui gignuntur eandem rationem habent, quàm multiplicati,
Atqui a ducitur in seipsum, fitq; d, ducitur etiam in b, & fit c,
Ergo sicut a & b, ita d & c.

Postrema colligit, c esse cubum, quod fuerat demonstrandum,

Ex. 23. octaui. Si duorum numerorum, quorum proportio fuerit sicut cubi ad cubum, alteruter fuerit cubus, erit quoq; cubus & alter,

Ex praecedentibus. At d c sese habēt sicut a b, qui sunt cubi, & d est cubus,
Ergo c erit cubus.

Theorema

Theorema nonum. 21. noni

Si pares numeri quilibet componantur, cõpositus ex omnibus par erit.

2	4	6
a	b	c

Componantur numeri a, b, c, qui singuli sunt pares, totus a, c erit par. Nam quoniã unusquisq; ipsorum a, b, c, par est, partem habebit dimidiam, quod constat ex diffinitione paris numeri. Quare & totus a c in duo dimidia diuidi poterit, ac per diffinitionem numeri paris, totus a c par erit.

Demonstratio facilior est, quàm vt explicatione indigeat.

Theorema decimum. 23. noni.

Si impares numeri componantur, & multitudo ipsorum fuerit impar, numerus, ex quibus componitur, erit impar.

3	5	7
a	b	c

Componantur numeri impares a, b, c, quorum multitudo est impar, totus a, c erit impar. Auferatur à c unitas, & relinquatur c par numerus, cùm igitur a b sit par, per. 23. quæ demonstrat, si numeri impares coaceruentur, quorum multitudo sit par, numerum ex eis compositum

esse parem, si illis addatur e, totus a e erit par per præcedentē: toti huic, si unitas addatur fiet impar: at unitate addita fit a c, totus igitur a c est numerus impar.

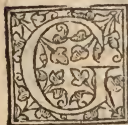
Hæc quoq; explicationē non desiderat.

Qui de Arithmetica scripserūt, omnes fermè Logisticam seu Computatoriam videntur cum ea cōiunxisse, quæ in sola contemplatione versatur, sed nobis vel ob hanc causam illā prætermittere licebit, quod scilicet possit ex alijs commodè peti, & ad disciplinam Aristo. nil omnino opus ferat.

Finis Arithmeticæ institutionis.



Quid Geometria, et quot eius principia, & partes.



EOMETRIA *vna est ex Mathematicis, Arithmetica sola posterior, cæteris omnibus ordine prior, & demonstrationũ firmitate longè superior: quæ magnitudinum, figurarum, terminorumq́ in his existentium rationes perpendit, affectionesq́ varias ad magnitudinem pertinentes certißima ratione inuestigat, ac inesse ipsi argumentis necessarijs demonstrat. Huius, quemadmodum & aliarum, duas pleriq́ fecerunt partes: quarum altera in contemplatione sola consistit,*

altera in actionem & opus referatur. Prior simplex est & vna, hæc in tria membra diuisa Altimetriã, Planimetriam, & Stereometriam, metiri corporum molem, secundum omnem partem ac dimensionem, arte docet & instrumentis: prima lineæ, hoc est, longitudinis, secunda extremitatis & latitudinis, tertia altitudinis mensurandæ rationem ostendẽte. Nobis propositum est, eius tradere elementa, quæ in contemplationem solam incumbit. Continet perinde atq; Arithmet. ars ista firmißima principia: quorũ alia simplicia sunt, alia composita. De quibus omnibus, quatenus instituti nostri ratio postulat, dicendum est.

Diffinitiones simplicia principia.

Magni

MAgnitudinis principium punctus est, quemadmodum & numerorum vnitas.

Punctus est, cuius nulla est pars, & in coniuncta collocatur quãtitate: cuius fluxu, perinde ac si vestigiũ aliquod relinqueret, linea describi à Mathematicis intelligitur.

Linea, est longitudo sine latitudine, cuius extrema sunt puncta. Recta est breuißima extensio, cuius medium non declinat ab extremis. Inflexa, seu obliqua, cuius medium ab extremis discrepat.

Ex lineæ fluxu extremitas describitur, quæ longitudinem & latitudinem tantùm obtinet, altitudinis expers: & lineis clauditur.

Corpus, perfectißimam magnitudinem, suo fluxu efficit extremitas, tribus

tribus continetur dimensionibus, longitudine, latitudine, & crassitie: clauditurq́ aut vna extremitate, aut pluribus, vt talus & sphæra.

De angulis.

ANgulus, est duarum magnitudinum contactus mutuus, nō rectè iacentium: aut potius magnitudo altera parte finita, & duabus lineis, vel extremitatibus comprehensa, se non rectè contingentibus. Contactus rectus linearum, est quando ex duabus vna coalescit, atq; conflatur.*

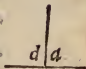
Anguli prima diuisio est in solidum, & planum: Planus, est linearū contactus, non rectè iacentium: Solidus, siue corporeus, est qui ex pluribus planis angulis, in eadē superficie minimè constitutis, & ad idem punctū

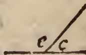
concur-

cōcurrentibus efficitur. Comprehenditur itaq; angulus solidus, vt minimum, tribus lineis rectis, & tribus planis angulis.

Planus angulus, aut rectilineus est, aut curuilineus, aut mixtus. Rectilineus est, qui ex rectis lineis conficitur: Curuilineus, qui ex obliquis: Mixtum efficiunt recta & obliqua, cùm coëunt.

Diuiditur vnaqueq; harū formarū plani anguli in alias præterea species. Rectilineus, in rectum, acutū, & obtusum. Rectū angulū efficit linea recta, super rectam incidens ad perpendiculum, vt a d. Cùm autē linea vna aliam intersecat, non ad perpendiculum, sed obliquè, fiunt anguli obtusus, & acutus. Obtusus maior est recto, vt e. Acutus recto minor, vt c.





F Curui-

a b c

Curuilineus angulus tres habet species, Concauum, Conuexū, & Medium. Concauus est, quem duæ lineæ circulares continent, sese secundum interiorem partem contingentes: Conuexum efficiunt quoq; lineæ circulares, quæ se secundum exteriorem partem contingunt: Medius ab eisdem constituitur, cùm altera secundum partem interiorem, altera secundum exteriorē, ad idē punctū concurrunt.

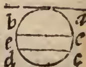
Mixtus angulus tres quoq; sub se formas cōtinet: Angulum cōtingentiæ, qui fit ex cōtactu rectæ lineæ ad curuā secundum exteriorē partem: Angulū semicirculi, qui producitur ex contactu diametri, & circūferentiæ in interiore parte circuli: & Angulum portionis circuli, quem efficit recta linea non ducta per centrum

cum

cũ circumferentia circuli: quorũ omnium exempla in subiectis figuris cernuntur.

De figura.

Figura est, quæ aut extremo vno clauditur, aut pluribus. Plana, quæ in extremitate descripta, lineis comprehenditur. Solida, quæ clauditur extremitatibus. Plana, aut rotũda est, aut rectilinea. Rotunda circulum continet, & quas irregulares Geometræ appellant.



Circulus est plana figura, vnica linea comprehensa, quæ circumferentia dicitur: in cuius medio punctus est, à quo omnes lineæ ad circumferentiam ductæ pares sunt.

Dimetiens circuli, est linea per centrum acta, vtrinque in circunfe-

rentiam desinens.

Semicirculus, est figura diametro, & abscisa circuli circumferētia cōprehensa.

Sectio, seu portio circuli, est quæ sub recta linea, & portione circuli, aut maiore, aut minore semicirculo continetur: vocaturq́ linea huiusmodi corda: portio verò circuli, arcus.

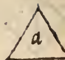
Area in circulo, & in alijs figuris, appellatur superficies, quæ intra lineam, aut lineas comprehenditur.

Rotunda figura irregularis curua linea vna continetur, sed in ea nō est punctus, à quo lineæ ad circumferentiam ductæ, pares sint: vt oui figura, aut lentis.

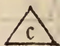
Rectilineæ figuræ, sunt quæ sub rectis lineis continentur: cuius infinitæ sunt formæ, & à numero late-

rum, atq; angulorum nomẽ accipiũt.

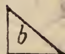
Prima est triangulum, quod tribus lateribus continetur, & totidem angulis.



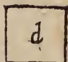
Aequilaterũ, quod tribus constat æquis lateribus: Isosceles, quod duo tantũ habet æqualia latera: Scalenũ, cuius omnia latera inæqualia sunt.



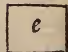
Est & altera trianguli diuisio ex angulis desumpta, in Orthogonium, quod rectum vnum habet angulum: Ambligonium, quod obtusum vnum habet, & acutos duos: Oxigonium, cuius omnes acuti sunt anguli.

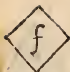


Figurarum quadrilaterarũ quadratum, est quod æquilaterum & rectangulum est, vt d.

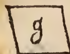


Altera parte longius, quod rectãgulum quidem est, sed non æquilaterum, vt e.





Rombus, qui æquilaterus; sed rectangulus non est, vt f.

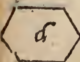


Romboides, qui neq; æquilaterus, neq; rectangulus est: habet tamen opposita latera æqualia, & pares angulos, vt g.

Aliæ ab his, quæ quatuor continentur lateribus, trapezia dicuntur.



Figura quinq; lateribus cōstans, pentagona est, vt i.



Quæ sex habet latera, hexagona, vt d. Sicq; in immensum excrescunt.

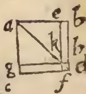
Figura solida, est quæ aut extremitate vna clauditur, aut pluribus: cuius formæ sunt permultæ, quas persequi non est nostri instituti.

Basis in omnibus figuris rectilineis appellatur linea, quæ subijci ac substerni cæteris intelligitur: reliquæ latera vocantur.

Para-

Paralellæ lineæ, sunt rectæ lineæ, quæ in eadem superficie descriptæ, etiam si vtrauis ex parte in infinitum producantur, nunquam concurrent.

In spacio paralellogramo, ea, quæ diameter secat per medium paralellograma, circa eandem diametrum consistere dicuntur. Eorum verò, quæ circa eandem diametrum consistunt, vnumquodq; cum duobus supplementis gnomon appellatur, vt in proposita figura a b c d quadratum a g e K, *& paruulum quadratum* K *f h d, quæ diameter a d per medium secat, circa eandem diametrum dicuntur consistere. Reliqua g* K, *c f, &* c K. *b h supplementa vocantur: vnūquodq; autem quadratū cū duobus his supplementis dicitur gnomon.*



Axiomata, seu dignitates.

1 *QVæ vni & eidem sunt æqualia, & sibi inuicem sunt æqualia.*

2 *Si æqualibus æqualia addantur, vel idem commune, quæ procreantur sunt æqualia.*

3 *Si ab æqualibus auferãtur æqualia, quæ relinquũtur erunt æqualia.*

4 *Si inæqualibus inæqualia adijciantur, omnia erunt inæqualia.*

5 *Si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua inæqualia erunt.*

6 *Quæ eiusdem sunt duplicia, aut æquè multiplicia, æqualia esse sibi inuicem est necesse.*

7 *Quæ eiusdem sunt dimidiũ, æqualia sunt ad inuicem.*

8 *Quæ sibimet cõueniunt, sunt quoq; æqualia.*

Omne totum maius est sua parte, & omnibus partibus simul sumptis æquale. 9

Postulata.

A *Quouis puncto in datum quodcunque punctum rectam lineam ducere.* 1

Rectam lineam definitam in continuum rectumque producere. 2

Super centrum quoduis, occupato quantolibet interuallo, circulum describere. 3

Omnes rectos angulos ad inuicem esse æquales. 4

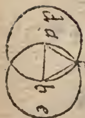
Si linea recta super duas rectas ce ciderit, & anguli ex eadem parte duobus angulis rectis minores fuerint, duas illas in eandem partem protractas, coniunctum iri. 5

6 *Rectam lineam, vel obliquam à dato puncto, quod intra figuram est, ad extremũ quodcunq; punctum in eodem plano signatum eductã, ipsius figuræ latera intersecare.*

8 *Duas rectas lineas superficiẽ nullam claudere.*

Sunt & alia tam postulata, quàm axiomata his similia penè infinita, quæ longum esset percensere.

THEOREMA primum.



Triangulum æquilaterum, supra datam rectam lineam collocare.

Sit recta linea a b, pede uno circini in a collocato, & altero usq; ad b extẽso, circulũ describã per tertiam petitionem, c d b: Rursus, seruata eadem circini extensione, super punctum b alterum describam circulum priori æqualem, qui se in duobus

bus punctis interſecabunt c, & b. Ab interſectione altera, ut c, ad puncta lineæ a b, rectas duas lineas ducam per primam petitionem: eritq; factum triangulum æquilaterum, a c b. Nam quia à cen*tro a, circuli c d b ductæ ſunt lineæ a b, & a c ad eius circumferentiam, erunt æquales per circuli diffinitionem.* Eadem quoq; ratione lineæ *b a, & b c pares erunt, ducuntur enim à centro circuli a c e ad eius circumferentiam. Iam cùm lineæ a c, & b c æquales ſint lineæ a b, ipſæ quoq; erunt æquales per primum axioma. Ita relinquitur, latera omnia trianguli a c b eſſe æqualia, ac proinde factum eſſe triangulum æquilaterum, quod fuerat demonſtrandum.*

Explicatio.

Demonſtratio probat, triangulum *a c b* æquilaterum eſſe tribus rationibus.

Prima concludit, lineas a c, & a b eſſe pares, in hunc modum.

Omnes lineæ ductæ à centro ad circumferentiã pares ſunt. *Ex diffinitione circuli.*

Lineæ *a c*, & *a b* ducuntur à centro ad circumferentiam, *Hypotheſis.*

Ergo lineæ *a c*, & *a b* ſunt pares.

Secunda

Secunda colligit, lineas a b & b c pares esse, argumento simili, & ex eodem principio ducto.

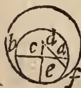
Tertia concludit, lineas a c & b c pares esse, in hunc modum.

Ex. 1. axiomate. Quæ sunt eidem æqualia, sunt ad inuicē æqualia.

Ex præcedentibus. Lineæ a c & b c sunt æquales lineæ a b,

Ergo sunt ad inuicem æquales. Ex quibus sequitur in proposito triāgulo latera omnia esse æqualia.

Theorema secundum.



A Dato puncto, cuiuis rectæ lineæ propositæ æquam rectam lineam ducere.

Sit a punctus datus, & b c linea proposita, cui à puncto a ducenda sit æqualis. a punctum cōiungam cum altero extremo lineæ b c, nempe c per lineam a c, super quam constituam triangulum æquilaterum per præcedentem a c d. Iam pede circini in extremo c collocato, & altero secundū quātitatem b c lineæ expanso, describam circulum e b per tertium postulatum, & latus trianguli æquilateri d c protraham usq; ad e, ut sit linea tota d c e: secundum cuius quantitatem describā circulum e f, & latus d a trianguli protraham usq; ad f. Erit itaq;

itaq; linea a f, lineæ b c æqualis. Nam b c & c e æquales sunt, cùm ex eodem centro ducantur. Rursus d f & d e sunt itidem pares propter eandem causam. Ab his auferamus d a & d c latera æqualia trianguli, quæ supererunt lineæ c e & a f erunt æquales per tertiũ axioma. Quòd si lineæ c e æqualis est a f, & eidem æqualis b c, b c igitur & a f pares erunt per primum axioma.

Explicatio.

Demonstratio probat in proposita figura lineam a f, quæ ducta est à dato puncto a, propositæ lineæ b c æqualem esse quatuor rationibus.

Prima ostendit, lineas b c & c e æquales esse, in hunc modum.

Omnes lineæ ductæ à centro ad circumferentiam pares sunt, — Ex diffinitione circuli.

Lineæ b c & c e ducuntur à centro ad circũferentiam, — Hypothesis.

Ergo sunt æquales.

Secunda ostendit, d f & d e pares esse simili prorsus argumento, quia ducuntur à centro circuli e f ad circumferentiam.

Tertia demonstrat, lineas e c & a f pares esse.

Si ab

Ex. 3. axiomate. *Si ab æqualibus auferantur æqualia, æqualia relinquentur,*

Ex præcedentibus. Lineæ d f, & d e sunt pares.

Ergo sublatis partibus æqualibus c d, & a d, quæ supererunt lineæ c e, & a f erunt æquales.

Postrema demonstrat, a f æqualem esse b c.

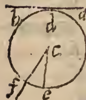
Ex. 1. axiomate. Quæ eidem sunt æqualia, sunt sibi inuicē æqualia,

Linea b c æqualis est lineæ c e, & eidē æqualis est a f,

Ergo lineæ a f & b c sunt æquales, quod fuerat demonstrandum.

Theorema tertium.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, à maiori minori æqualem rectā lineam abscindere.



Sint lineæ duæ a b, & c d, & à maiori c d, sit minori æqualis abscindenda. A puncto c duco æqualem a b, ut præcedens docuit: sitq; c e. A c centro c, interuallo autem c e, describam circulum, lineam c d intersecantem in puncto f. Linea c f æqualis est lineæ c e, & eidem æqualis erat a b: erunt igitur a b, & c f pares per primam communem sententiam. Ita à maiori linea c d, abscissa est minori a b æqualis scilicet c f.

Explicatio

Explicatio.

Demonstratio probat lineam c f, quæ à maiori c d abscinditur, æqualem esse lineæ a b, duabus rationibus.

Prima ostendit, lineã c f æqualem esse lineæ c e, in hunc modum.

Lineæ ductæ à centro circuli ad circumferentiã sunt pares, — Ex diffinitione circuli.

Lineæ c f, & c e ducuntur à centro circuli ad circumferentiam, — Hypothesis.

Sunt igitur pares.

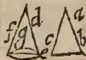
Secunda concludit, lineam c f æqualem esse lineæ a b, quod fuerat demonstrandum.

Quæ eidem sunt æqualia, sunt ad inuicẽ æqualia,

Linea a b est æqualis lineæ c e, & eidem c e æqualis est linea c f, — Ex. 1. axiomate.

Ergo c f & a b erunt æquales. — Ex præcedentibus.

Theorema quartum.



Quorũcunq; duorũ triangulorũ duo latera vnius, duobus lateribus alterius fuerint æqualia, & anguli his æquis lateribus cõteti æquales, erit basis

basis basi, & reliqui anguli vnius, reliquis angulis alterius æquales, & deniq; totus triangulus toti triangulo æqualis.

Sint duo triangula a b c, d e f, sitq; latus a b æquale lateri d e, & latus a c æquale lateri d f, & angulus a æqualis angulo d. Dico basim b c æqualem esse basi e f, & angulum b angulo e, angulum c angulo f, & totam trianguli a b c superficiem superficiei triãguli d e f æqualem. Superponatur & accommodetur triangulum a b c triangulo d e f, ut angulus a cadat super d angulum, latus a b super d e, & a c super d f. Certè ista omnia cõgruent sibimetipsis, & neq; angulus angulum excedet, nec latera unius trianguli, latera alterius, per octauum axioma. Rursus cùm latus a b conueniat cum latere d e, & a c cum latere d f, punctũ b congruet puncto e, & c puncto f: quare basis b c congruet basi e f, & erit ipsi æqualis. Alioqui si extremis punctis linearum cõgruentibus, lineæ non congruerent, una extra alteram caderet, & clauderent superficiem, quod repugnat ultimo postulato. Quòd si lineæ omnes trianguli unius pares sunt lineis alterius, & anguli angulis, totum triangulum toti erit æquale.

Explicatio.

Ex octauo axiomate.

Demonstratio uim accipit ex penultimo axiomate, &

mate & unica ferè ratione, quod demonstrandum est, concludit ad hunc modum.

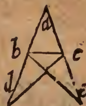
Quæ sibi inuicē congruunt, sunt æqualia.

Sed si triangulum a b c, triangulo c d f, superponatur & accōmodetur anguli angulis cōgruūt, & lineæ lineis. Ex.8. axiomate hypothees.

Ergo & anguli pares sunt angulis, & lineæ lineis, & totus triangulus toti triangulo est æqualis.

Theorema. quintum.

Isoscelis trianguli qui sunt ad basim anguli, pares sunt. Quòd si eius duo latera rectè protrahātur, fient quoque sub basi duo anguli inuicem æquales. quo vsus est Aristoteles. 24. cap. prmi Priorum.



Sit triangulus a b c, cuius latus a b, sit æquale lateri a c: dico angulum a b c, æqualem esse angulo a c b. Quòd si protrahantur a b, & a c, usq; ad d, & e, fiet angulus d b c, æqualis angulo e c b. Protractis a, b, & a, c, constituam lineam a, d, æqualem lineæ a e, per tertium Theorema: & educam lineas e b, & c, d. His ita constitutis intelligo primū duos triangulos a, b, e, & a, c, d, qui æquales sunt & æqui anguli. Nam prioris litera a b, & a, e, æqualia sunt duobus lateribus alterius a, c: et a d, angulus a, cōmunis utriq; ergo per præcedentem, basis b e, æqualis

erit basi c d, & angulus e, æqualis angulo d, & angulus a b e, æqualis angulo a c d. Item alios duos triangulos intelligo d b c, & e c b: qui ostenduntur esse æqui lateri, & æqui anguli. Nam latera b, d & c d, trianguli b, d, c, sunt æqualia duobus lateribus e c, & e, b, trianguli e b c: & angulus d, angulo e: ergo per præcedentem, basis basi, & reliqui anguli reliquis angulis. Quare angulus d, b, c, est æqualis angulo e c b, quod secundo loco fuerat demonstrãdum. Illi enim sunt sub basi Isoscelis positi. Iam totus angulus a b e, est æqualis a c d: si ergo à toto auferamus æquales angulos e c b, & d b c, qui superərũt a b c, & a c b, erunt æquales per tertiũ axioma, qui sunt anguli ad basim Isoscelis positi, quod primo loco fuerat demonstrandum.

Explicatio.

Demonstratio sumptis hypothesibus, & constituta figura, demonstrat in primis triangulos a b e, & a c d esse æquiangulos & æquales in hũcmodũ.

Ex quarto. *Omnium triangulorum, quorũ duo latera unius fuerint æqualia duobus lateribus alterius, & anguli æquilateribus contenti æquales, erit basis basi, & deniq; totus triangulus toti æqualis.*

Sed in propositis ita res sese habet.

Ex hypothe. *Ergo totum triangulum toti par erit, & angulus a b e, æqualis angulo a c d.*

Secunda ratio ostendit partem posteriorem angulos, qui sunt sub basi d b c, & e c b, pares esse.

Omnium

Omnium triangulorum, quorũ duo latera unius fuerint æqualia duobus lateribus alterius. &c. sed in propositis triangulis, latera d b, & d c, trianguli d b c, æqualia sunt lateribus alterius e c, & e b: & anguli d c æquales.

Ergo anguli, qui sunt sub basi Isoscelis e c b, & d b c, erunt æquales.

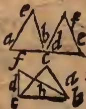
Tertia ratio concludit priorem partem, angulos a b c, & a c b, qui sunt ad basim Isoscelis pares esse.

Si ab æqualibus auferantur æqualia, quæ relinquuntur sunt æqualia. *Ex. 3. axiomate.*

Sed totus angulus e b a æqualis erat toti angulo d c a, & a b his ablati sunt æquales anguli d b c, & e c b, qui sunt sub basi. *Ex præcedentibus.*

Ergo qui relinquuntur anguli a b c, & a c b, erunt æquales, quod fuerat demonstrandum.

Theorema sextum. 8. primi.



Omnium triangulorum, quorum duo latera unius fuerint æqualia duobus lateribus alterius, & basis basi æqualis, qui continentur æquis lateribus, anguli erunt æquales.

Sint duo trianguli a b c, d e f, sitq; latus a c

æquale lateri d f, & b c, æquale e f, & a b basis, æqualis basi d e. Dico angulum c parem esse angulo f, angulũ a, angulo d, & b, e. Nam si triangulus unus alteri superponatur & accommodetur, certè oportebit latera lateribus congruere, & basim basi, per octauum axioma. Et punctus f cadet super c, alioqui lineæ non essent pares, ut ex altera constat figura, cadet quoque d super a, & e super b. Ita anguli omnes unius erunt pares angulis alterius, quod fuerat demonstrandum.

Explicatio.

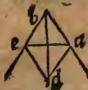
Demonstratio unica hac ratione concludit propositum, angulos æquis lateribus contentos pares esse f, c: d, a, e, b.

Ex. 8. axiomate. Quæ sunt æqualia, sibi inuicem congruunt, sed

Ex hypothesi. latera unius trianguli æqualia sunt lateribus alterius, & basis basi.

Ergo si alter alteri accommodetur, & latera congruent, & anguli angulis. Quare necesse est angulos esse pares.

Theorema septimum. 9 primi.



Datũ angulum per æqualia secare.

Sit datus angulus, quem oportet diuidere a b c, lineæ ipsum continentes, fiant æquales, sint a b c, & a c. Et trahatur linea b c: super quam constituatur

triangulus

triangulus, siue æquilaterus, siue æquicrurus b d c, punctiq; a d linea recta iungantur a d. Dico illam *diuidere angulum a in duo æqualia. Sunt enim duo trianguli, b a d, & c a d: quorum latera unius sunt æqualia lateribus alterius, scilicet b a, & a d, & c a & a d: & basis b d, basi b c. Quare per præceden tem anguli æquis lateribus contenti b a d, & c a d, pares erunt. Ita constat totum angulum b a c diuisum esse in duo æqualia.*

Explicatio.

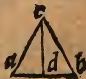
Concludit demonstratio angulum b a c, per lineã a d, diuisum esse in duo æqualia unica ratione.

Quorum triangulorũ latera unius æqualia sunt lateribus alterius, & basis basi, Anguli æquis lateribus contenti sunt æquales, Ex.6.axiomate.

Sed duo latera b a, & d a, trianguli b d a, æqualia sunt duobus lateribus alterius c a, & d a, & basis b d, basi d c, Ex hypothesibus.

Ergo anguli b a d, & c a d, æquis lateribus contenti, pares erunt. Quare totus angulus b a c, diuisus est in partes æquas.

Theorema octauum. 10. primi.



Datam rectam lineam, per æqualia diuidere.

Sit linea diuidenda per æqualia a b, super ipsam

constituam triangulum æquilaterum a b c, & angulum c diuidam in partes æquas per præcedentē, ducta linea c d.

Dico *lineam c d, diuidere lineam a b per æqualia. Sunt enim duo trianguli a c d, & b c d, & latera prioris a c, & d c, sunt æqualia lateribus alterius b c, & d c, & angulus c unius, par angulo c, alterius.* Erit *igitur per quartam basis a d, æqualis basi d b, quod demonstrandum erat.*

Explicatio.

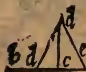
Demonstratio *unica ratione propositum concludit, lineam a b, à linea c d, in partes æquas esse diuisam.*

Ex quarto. Quorum *triangulorum latera sunt æqualia, & anguli æquis lateribus contenti pares, basis basi est æqualis.*

Ex hypothesi. *Sed duorum triangulorum a c d, & b c d, latera sunt æqualia, & angulus c par angulo c.*

Ergo *basis a d, æqualis basi d b.* Linea *igitur a b in partes æquas est diuisa.*

Theorema nonum. 11. primi.



Data recta linea, à signo in ea signato, rectam lineam ad rectos angulos excitare.

sit

Sit data linea a b, signetur in ea punctus c, à quo sit educenda perpendicularis. per. 3. constituam lineam b c æqualem lineæ a c: & super totam a b, cõstituo triangulum æquilaterum a b d, ac tandẽ extraho ex puncto c, lineam c d, hanc dico esse perpẽdicularem ad lineam a b. Sunt enim duo trianguli a c d, & b c d: & quia duo latera a c, & c d unius, sunt æqualia lateribus c b, & c d alterius, & basis a d, basi b d, erit per. 8. angulus a c d, æqualis angulo b c d. Quare uterq; eorum erit rectus. Cùm enim recta linea super rectã consistens angulos utraq; parte æquales fecerit, uterq; æqualium angulorum rectus est, & linea, quæ super altera cõsistit, est perpendicularis. Quare linea c d, ad lineam a b erit perpendicularis.

Explicatio.

Demonstratio colligit lineam c d, esse perpendicularẽ, & angulos a c d, & b c d, esse rectos, duabus rationibus. Prima concludit præfatos angulos esse pares.

Quorum triangulorum latera sunt æqualia, & basis basi æqualis, anguli æquis lateribus contenti sunt æquales. Ex. 8. prō.

Sed latera a c, & c d sunt æqualia lateribus c b & c d, & basis a d, basi b d. Sunt hypothe.

Ergo anguli a c d, & b c d, erunt æquales: nam continentur æquis lateribus.

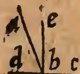
Secunda concludit prædictos angulos esse re-

ctos, & lineam c d esse perpendicularem, in hunc modum.

Cùm recta linea super recta consistens utrobiq; angulos æquales fecerit, uterq; illorum angulorum est rectus, & linea, quæ super altera cadit est perpendicularis.

Ex præcedentibus. At linea c d, efficit æquales angulos. Ergò & perpẽdicularis est, & anguli, quos cõstituit, sunt recti.

Theorema decimum. 13. primi.



Cùm recta linea super rectã consistens, angulos fecerit, aut duos rectos, aut duobus rectis, pares efficiet.

Super rectam c d, cadat linea a b, quæ si fuerit perpendicularis, faciet duos angulos rectos per cõuersionem diffinitionis lineæ perpendicularis. Si autem non sit perpendicularis, ducatur à puncto b perpendicularis, per. 11. b e, eruntq; duo anguli e b c, & e b d recti per eandem conuersionem. Iam cùm duo anguli d b a, & a b e sint pares angulo d b e, ipsi cum angulo c b e, erunt æquales duobus rectis. Quare tres anguli d b a, a b e, & c b e pares sunt duobus rectis.

Sed angulus c b a, est æqualis duobus angulis c b e, e b a, ergo duo anguli c b a, & a b d, sunt æquales duobus rectis. Hinc fit totum spacium, quod circunstat punctum quod uis in superficie plana.

plana, quatuor rectis angulis esse æquale.

Explicatio.

Demõstrationis prior pars explicatione nõ eget. Altera eius pars concludit angulos c b a, & d b a, esse pares duobus rectis his rationibus. Prima colligit, ducta linea perpendiculari b e, angulos c b e, & e b d esse rectos.

Cùm recta super rectam consistens, angulos fecerit adinuicem æquales, uterq; illorum angulorũ est rectus. Ex diffinitione recti angu.

Sed anguli propositi fiunt à linea b e ad perpẽdiculum ducta. Hypothe.

Igitur sunt anguli recti.

Altera colligit angulos rectos c b e, e b d pares esse angulis tribus e b a, a b d, e b c in hunc modũ.

Si æqualibus addantur æqualia, aut idem commune, quæ reliquuntur sunt æqualia, Ex. 2. axiomate.

Sed anguli duo e b a, a b d, æquales sunt angulo e b d: nam partes æquales sunt toti, Ex. 9. axiomate.

Ergo si utrisq; addamus angulum communem c b e, duo anguli c b e, e b d, pares erunt tribus angulis e b a, a b d, e b c.

Tertia ostẽdit angulos c b a, a b d, æquales esse angulis c b e, e b a, a b d, æquales esse simili argumento.

Si æqualibus addantur æqualia, aut idem cõmune, quæ relinquuntur sunt æqualia, Ex 2. axiomate.

Sed angulus c b a æqualis est angulis c b e, e b a, Ex. 9. axiomate.

G 5 totum

totum enim æquale est partibus.

Igitur si utrisq; addamus communem angulum a b d, anguli c b a, a b d æquales erunt tribus angulis c b e, e b a, a b d.

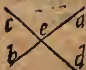
Quarta colligit quod demõstrandum erat, angulos c b a, a b d, esse pares duobus rectis.

Ex ratio. *Quæ eidem sunt æqualia, sunt inter se æqualia.*

Ex præcedentibus. *Sed anguli c b a, a b d, sunt pares tribus c b e, e b a, a b d, & eisdem tribus æquales sunt anguli c b e, e b d.*

Ergo anguli c b a, a b d, pares erunt angulis c b e, e b d. Quare cùm hi recti sint, pares illi erũt duobus rectis.

Theorema vndecimũ. 15. primi.



Omnium duarum linearum se inuicem secantium, omnes anguli cõtra se positi sunt æquales.

Sint duæ lineæ a b, & c d, se inuicem secantes in puncto e, angulus d e b par erit angulo a e c, & angulus c e b angulo a e d. Erunt enim per. 13. duo *anguli a e c, & c e b æquales duobus rectis.* Itemq; *anguli c e b, & d e b erunt per eandem pares duobus rectis. Quare cùm omnes anguli recti sint æquales, priores posterioribus pares erunt. Si igitur aufe-*

ramus

ramus communem angulum c e b, erit angulus a e c æqualis angulo d e b. Eodem modo reliqui oppositi ostendentur æquales.

Explicatio.

Demonstratio cõcludit angulos d e b, & a e c, oppositos esse pares duabus rationibus. Prima colligit angulos a e c, & c e b, itemq; angulos c e b, & d e b, esse pares duobus rectis, ac proinde inter se æquales ad hunc modum.

Recta linea super rectam consistẽs, angulos efficit rectos, aut pares, duobus rectis, sed priores sunt ex linea e c, super rectam a b cadente, posteriores ex linea e b, super rectam d c, Ex 13. Hypothe.

Ergo utriq; pares erunt duobus rectis, unde fit ut sint priores posterioribus æquales, nam per postulatum. 4. omnes recti sunt æquales.

Secunda concludit quod propositũ est, hoc pacto: si ab æqualibus auferantur æqualia, uel idem commune, quæ relinquuntur sunt æqualia. Ex. 3. axiomate.

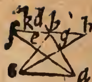
Sed anguli a e c, & c e b, pares sunt angulis c e b, & d e b, Ex præcedenti.

Ergo si ab ijs auferamus communem angulũ c e b, qui relinquũtur erunt æquales, a e c, & d e b. Simili argumento ostendentur æquales c e b, a e d, oppositi.

Theorema duodecimum.

16. primi.

Omnis



Omnis trianguli vno latere producto, exterior angulus vtrouis interiori & opposito maior est.

Protrahatur triãguli a b c latus usq; ad d, angulus d b c, maior est angulo b a c, & b c a. Diuidam enim per 10. lineam c b, per æqualia in puncto e: & protraham a e, usq; ad f, ut sit e f, æqualis a e. Protraham quoq; lineam b f, intelliguntur duo triangula, c e a, & b e f. & quia duo latera a e, & e c, trianguli a e c sunt æqualia duobus lateribus f e, & e b, trianguli f e b, & angulus e, unius æqualis est angulo e alterius per præmissam, sunt enim anguli oppositi, erit per. 4. angulus e c a, æqualis angulo e b f, unde fit, angulum e b d, maiorem esse angulo b c a. Simili argumento probabitur idem angulus e b d, maior esse c a b,

Explicatio.

Demonstratio ostẽdit angulũ d b c, maiorẽ esse angulo b c a, hac sola ratione: Quorũcunq; triangulorum duo latera unius sunt æqualia duobus lateribus alterius, & anguli his æquis lateribus contẽti æquales, erit basis basi æqualis, & totus triãgulus toti triãgulo æqualis. Sed latera a e, & e c, trianguli a e c, sunt æqualia duobus lateribus f e, & e b, trianguli f e b, & angulus e, unius æqualis angulo e alterius, cum sint contra se positi. Er-

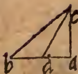
Ex.4.Pro. Hypothe.

Ex precedente.

go angulus e c a, æqualis erit angulo e b f. Quare cùm angulus c b d, maior sit angulo e b f, est enim is pars illius, maior quoq; erit angulo e c a, quod demonstrandum fuerat.

Theorema decimumtertium 18. primi.

Omnis trianguli longius latus, maiori angulo appositum est.



Sit in triãgulo a b c, angulus a, maior angulo c, latus c b, maius erit latere a b. Si enim sit æquale, erit per 5. angulus a, æqualis angulo c, quod est contra hypothesim. Si autem a b, sit maius fiat æquale per, 3. sitq; d b, æquale c b. Erit ergo per. 5. angulus d c b, æqualis angulo b d c. Sed b d c est maior angulo b a c, per. 16. ergo b c d est maior b a c, Quare erit etiam maior angulo a c b. Fiet itaq; ut pars sit maior toto. quod cum fieri nequeat, sequitur uerum esse quod fuerat demonstrandum.

Explicatio.

Demonstratio concludit, cùm sit angulus a maior angulo c, latus b c, maius esse latere a b. Hoc argumento.

Aut est æquale, aut minus Sed nec æquale, nec minus: igitur maius erit. non esse æquale ostenditur adhunc modum.

Angu

Ex.5. *Anguli,qui sunt super basim isoscelis,sunt æquales.*

Sed a, & c, sunt anguli, supra basim isoscelis positi.

Igitur erunt æquales.

Non esse autem latus a b maius latere c b,his rationibus colligit. Prima concludit angulum d c b, æqualem esse angulo b d c, eodem modo quo & præcedens.

Secunda concludit angulum b d c, maiorem esse angulo b a c, ad hunc modum,

Ex. 16. *Omnis triãguli angulus externus maior est utrouis interno opposito,*

Sed b d c, est externus angulus trianguli d a c,

Ergo angulus b d c, est maior angulo opposito b a c.

Tertia colligit incommodum & impoßibile, partem maiorem esse toto.

Axioma. *Quod est maius maiore,maius est minore.*

Sed angulus b d e,est maior angulo b a c, angu

Ex præ. *lo autem b d e par est angulus b c d.*

Igitur angulus b c d maior erit angulo b a c: at angulus b a c maior esse ponebatur angulo b c a: fiet igitur,ut angulus b c d maior sit angulo b c a, cuius est pars,quod est impoßibile.

Theorema decimumquartum 19. primi.

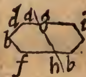
Omnis

Omnis trianguli maior angulus maiori lateri oppositus est.

Sit triangulum a b c, cuius angulus a sit maior angulo c, latus a c maius erit latere a b. Nam si non sit maius, aut æquale erit, aut minus: at neutrum esse potest. Primum æquale non erit, fieret enim ut anguli a c essent æquales, cùm sint ad basim Isoscelis, per quintam. Quod est contra hypothesim. Minus quoque esse non potest, esset enim angulus c minor angulo a, per præcedentem. Quare relinquitur, latus b c maius esse latero a b.

Demonstratio facilior est, quàm ut explicatione egeat.

Theorema decimumquintum, 27. primi.



Si recta linea super duas rectas ceciderit, duosque angulos sibi inuicem æquales fecerit, rectæ illæ lineæ erunt æquidistantes.

Linea a b cadat super duas lineas c d, & e f, & secet lineam c d in puncto g, & lineam e f, in puncto h, sintque anguli d g h, & e h g

& e h g æquales, dico lineas c d, & e f, esse æquidistantes Nam si non sint, concurrant ergo ad d f, in puncto l, fiet triangulum l g h, cuius g est angulus externus, qui cùm positus sit æqualis esse angulo h coalterno, tam intrinseco; quàm extrinseco, accidit, ut exterior angulus triãguli par sit interno opposito, quod repugnat decimosexto Theoremati.

In hoc quoq; nulla desideratur explicatio.

Theorema decimumsextum, 29. primi.

Si duabus lineis æquidistantibus linea superuenerit, duo anguli coalterni æquales erunt, angulusq́ extrinsecus angulo intrinseco sibi opposito æqualis, iteq́ duo anguli intrinseci ex alterutra parte constituti duobus rectis angulis æquales.

Explicatio.

Demonstratio multis partibus continetur. Prima concludit angulos g, & h coalternos, esse æquales argumento ducente ad incommodum.

Si angulus b g h non est æqualis angulo c h g, alter eorũ erit maior. Sit ergo maior angulus c h g.

Cùm duo

Cùm duo anguli c h g, & g h d sint æquales duobus rectis. Ergo *per.15.propositionẽ duo anguli b g h & d h g erunt minores duobus rectis.* Ergo *per 4.petitionem duæ lineæ a b, & c d, si protrahãtur, concurrent uersus partem b & d, in puncto aliquo,* K. Q*uare non erunt æquidistantes, quod cùm sit contra propositum, posuimus enim esse æquidistantes, relinquitur propositos angulos coalternos b g h & c h g esse æquales.*

Secunda pars monstrat angulum g extrinsecum æqualem esse angulo h intrinseco sibi opposito, & ex eadem parte sumpto, hac ratione:

Angulus b g h æqualis est angulo a g e, Ergo *angulus a g e extrinsecus æqualis est angulo c h g intrinseco per primam communem sententiam.* Per.15.

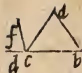
Tertia pars concludit angulos g & h intrinsecos & ex eadẽ parte sumptos esse æquales duobus rectis, ad hunc modum,

Duo anguli a g e, & a g h, sunt æquales duobus rectis, Per.13.

Sed angulus c h g par est angulo a g e. Ergo *duo anguli a g h, & c h g erunt æquales duobus rectis.* Per praec.

Theorema decimumseptimũ. 32. primi. Ab Arist. sumitur. 37. cap. primi Priorum.

H Omnis



Omnis trianguli angulus extrinsecus duobus intrinsecis sibi oppositis est æqualis. Omnes autem tres angulos eius, duobus rectis angulis æquos esse necesse est,

Explicatio.

Demonstratio in primis concludit in proposita figura angulum c extrinsecum æqualem esse duobus angulis intrinsecis a b simul iunctis, hoc argumento: Protracta linea c f æquidistanti lineæ a b per. 31. angulus totus c diuisus est in duos f c a, & f c d. Iam sic colligo,

Per.29. *Angulus f c a est æqualis angulo a, & angulus f c d extrinsecus est æqualis angulo b intrinseco,*

Per eandē. *Ergo totus angulus a c d extrinsecus æqualis est duobus illis intrinsecis & oppositis, a b.*

Secunda pars demonstrationis concludit, tres angulos a b c simul iunctos, æquales esse duobus rectis hoc argumento,

Per præce. *Duo anguli a b c, & a c d sunt æquales tribus angulis trianguli a b c,*

Per.13. *Sed duo anguli a c b, & a c d sunt æquales duobus rectis,*

Ergo tres anguli a b c erunt æquales duobus rectis.

Theorema

Theorema decimum octauum ex præcedente deductū. Ab Arist. sumptū. 20. ca. 1. Post.

Omnis figuræ recti lineæ anguli omnes externi pares sunt quatuor rectis.

Ex præcedenti colligitur omnis figuræ polygoniæ oēs angulos internos tot rectis bis esse æquales, quot habet angulos, dēptis inde quatuor. Vt exēpli gratia, quadrati omnes anguli interni bis tot rectis sunt æquales, quot cōtinet angulos, dēptis inde quatuor. Cùm enim omnis figura polygonia in tot triāgulos diuidi poßit, quot habet angulos, ductis lineis à puncto medio ad singulos angulos, quadratum disoluetur in quatuor triāgula. Et quia omne triangulū habet angulos pares duobus rectis, fiunt octo anguli recti, qui numerus duplex est ad angulos quadrati. Quadratū ergo tot habet angulos rectos, scilicet octo, dēptis tamē inde illis angulis, qui punctū mediū circunstant, qui nō pertinēt ad quadratum. At anguli punctū mediū circunstātes quatuor sunt, ut cōstat ex. 13. Quadratū ergo tot habet angulos rectos internos, quot cōtinet angulos, demptis inde qu tuor. Ex ijs Theorema propositū facilè cōcluditur ad hunc modū, Omnis figuræ polygoniæ omnes anguli interni, & externi bis tot Per. 13.

rectis sunt æquales, quot habet internos angulos.

Interni autẽ bis tot rectis sunt æquales, quot habet angulos, dẽptis inde quatuor, Ergo necesse est externos, illis quatuor rectis esse pares.

Theorema decimumnonum, quo vsus est Arist. ca. 19. 2. Prio.

Si angulus interior sit maior exteriori, aut anguli triãguli sint maiores duobus rectis, ex necessitate efficitur, lineas æquidistãtes cõcurrere.

Prima pars Theorematis cõcluditur ex Theoremate. 17, in eadẽ proposita figura, ijs rationibus:

Prima, angulus c b g interior maior est angulo
Per. 15. *a g e externo, Sed angulus a g e par est angulo b g h, ergo angulus c h g maior est angulo b g h.*

Ex *præcedentibus.* *Secunda ratio, Angulus c h g maior est angulo b g h. Sed anguli c h g, & d h g sunt pares duobus*
Per, 15. *rectis: ergo anguli b g h, & d h g minores sunt duobus rectis.*

Ex *præcedentibus.* *Tertia ratio, Anguli d h g, & b g h sunt minores duobus rectis: ergo lineæ a b, & c d, quæ positæ sunt æquidistãtes, concurrẽt, per quartã petitionẽ.*

Secunda pars Theorematis concluditur ijs rationibus, quæ ex. 18. Theoremate uim accipiunt.

Per. 17. *Prima, Angulus g a b exterior par est duobus*
Per. 16, *internis oppositis a b f, & b f a: sed f a b æqualis*

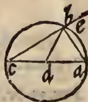
est

est a b d. Igitur tres anguli interni trianguli pares sunt duobus angulis g a b. & a b d.

Secunda ratio, Tres angulis trianguli sunt maiores duobus rectis, ut ponitur, Sed g a b, & a b d pares sunt illis tribus, Igitur g a b, & a b d maiores erunt duobus rectis. Per praece. Per. 15.

Tertia ratio, Quatuor anguli g a b, b c a, a b d, & a b e sunt pares quatuor rectis, Si igitur ab ijs demamus duos angulos g a b, & a b d, qui sunt maiores duobus rectis, anguli, qui relinquuntur ex eadē parte b a c, & a b e erūt minores duobus rectis.

Postrema ratio, Anguli qui sunt ex eadem parte b a c, & a b e sunt minores duobus rectis: ergo per quartum postulatū necesse est lineas g c, & d e parallelas concurrere. Quare si anguli trianguli maiores sint duobus rectis, efficitur planè lineas æquidistantes tandem concurrere.



Theorema vigesimum. 30. tertij elemētorū, quo vtitur Arist. ca. 11. 2. libri Posterio.

Si rectilineus angulus in semicirculo supra arcū consistit, rectus est.

Explicatio.

Demonstratio probat angulum a b c rectilineū qui fit in circunferentia semicirculi, rectum esse ijs rationibus.

Per.5.Pri. *Prima ratio, ducta linea in centrum b d, sic ne-citur, Anguli qui sunt ad basim isoscelis, sunt æ-quales, Anguli a b d, & a sunt supra basim trian-guli isoscelis a b d: ergo anguli a, & a b d sunt æ-quales.*

Secũda ratio monstrat angulos d b c, & c, triã guli isoscelis d b c, esse æquales, eodem modo.

Per.32.pr. *Tertia ratio, Angulus c d b, cùm sit exterior, est æqualis duobus internis oppositis d b a, & a, Sed anguli d b a, & a, sunt æquales: ergo angulus c d b duplus erit ad angulum d b a.* Et *eadem ratione probabitur angulum a d b duplum esse ad angu-lum d b c.*

Per præce. *Quarta ratio, Angulus c d b est duplus ad an-gulũ a b d, & angulus a d b est duplus d b c,* Ergo *duo anguli c d b, & a d b simul sumpti dupli sunt ad totalem angulum semicirculi a b c, ac proinde totalis angulus a b c est dimidium illorũ duorum.*

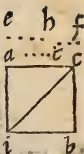
Per præce. *Quinta ratio, Totalis angulus a b c est dimidiũ duorum angulorum e d b, & a d b,* Sed *illi anguli*
Per.13.pr. *sunt pares duobus recti: ergo totalis angulus a b c semicirculi est dimidium duorum rectorum.*

Per se no. *Postrema ratio, Omnis angulus, qui est dimidiũ duorum rectorum, est angulus rectus:* Sed *angulus*
Per præce. *semicirculi a b c est dimidium duorum rectorũ: er-go angulus a b c semicirculi supra arcum consi-stens, rectus est.*

Theorema vigesimum primum

94.deci-

94. decimi, quo vsus est Aristoteles. 22. cap. primi Prior.



Demonstratio ostendit diametrum a b esse incommensurabilē lateri a c ductu ad incommodum. Incommodum autem est, parem numerum eundem esse cum impari. Conflatur autem ex multis rationibus.

Prima, Cōmensurabiles magnitudines eandem habent rationem, quam numerus ad numerum, a b, & a c sunt commensurabiles, Ergo eandem habent proportionem, quam numerus ad numerum. Sit ergo proportio a c ad a b, qualis est f e ad g, qui sunt minimi in sua proportione. Per deci.

Secunda ratio, Quod est a c ad a b, id est f e ad g. Sed a c est maior a b: ergo e f erit maior g, quare e f non potest esse unitas, erit igitur numerus.

Tertia ratio, Sicut a c ad a b, ita e f ad g: ergo sicut quadratum, quod ex a c, ad id quod est ex a b, ita quadratum e f ad quadratum g, At quadratum a c est duplum ad quadratum a b: ergo quadratum e f erit duplum ad quadratum g. Per 15. quinti. Per. 47. primi.

Quarta ratio, Quadratum e f est duplum ad quadratum g: ergo quadratum e f numerus est par: quare & e f erit numerus par. Si enim impar esset, & quod ex eo fit quadratū impar esset per uigesimum nonum noni.

Quinta ratio, Numeri minimi in sua proportione, primi sunt ad inuicem, e f & g sunt numeri minimi, Per. 24. sept.

mi, ergo erunt primi. Et e f est par, ut ostendimus, Igitur g impar. Nam si par esset non essent primi, metiretur enim eos binarius. Secetur iam per. 10. primi e f bifariam in h, hoc posito sit sexta ratio. Numerus e f est duplus ad e h eius dimidium: Ergo quadratum ex e f quadruplum erit ad quadratum ex e h, cùm quadratum ex e f sit duplum ad e f.

Per. 47. primi.

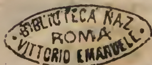
Septima ratio, Quadratũ ex e f quadruplum est ad quadratũ e h, At quadratũ ex e f erat duplũ ad quadratum ex g, Ergo quadratũ ex g erit duplum ad quadratum ex e h. Si enim octonarius quadruplus est ad binarium, & duplus ad quaternarium, certè quaternarius duplus erit ad binarium.

Postrema ratio.

Quadratum g duplum est ad e h, est igitur par, quare & ipse g numerus erit par. Nam si impar esset, quadratum eius esset impar. At positum est g esse numerum imparẽ, idem ergo numerus erit par & impar.

Pe. 29. no.

Quare si diameter sit lateri commensurabilis, ex necessitate efficitur eundem numerum esse parẽ & imparem. Quod cùm sit impossibile, relinquitur, diametrum incommensurabilem esse lateri.



FINIS.